第十章　概率

10.1　随机事件与概率

10.1.1　有限样本空间与随机事件

对点上分

1. ACD　【解析】下雪不冷化雪冷是必然现象，不是随机现象，**故 B 错误**；A，C，D 可能发生也可能不发生，均是随机现象，**故 A，C，D 正确**.

2. B　【解析】①抛掷 2 枚质地均匀的硬币，其中 1 枚正面朝上，1 枚正面朝下为随机现象；

②在标准大气压下，水在 0 ℃结冰，而非在 4 ℃，所以其为不可能现象；

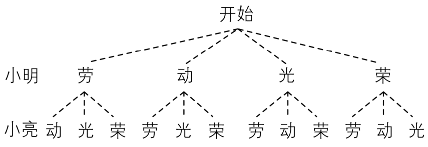
③从标有 1，2，3，4 的 4 张号签中任取 1 张，恰为 1 号签为随机现象；

④若 $x\in\mathbf{R}$，则 $|x|$ 的值不小于 0 为必然现象. **故 B 正确**.

3. D　【解析】试验的样本空间中样本点为（甲，乙，丙），（甲，丙，乙），（乙，甲，丙），（乙，丙，甲），（丙，甲，乙），（丙，乙，甲），共 6 个. **故 D 正确**.

4. 10　【解析】从标有 1，2，3，4，5 的 5 张纸片中一次性任取 2 张，不同的取法有（1，2），（1，3），（1，4），（1，5），（2，3），（2，4），（2，5），（3，4），（3，5），（4，5），共 10 种，即样本点的个数为 10.

5. 2　【解析】根据题意，作出如图所示的树状图.



由图可知，试验共有 12 种情况，其中两人抽取的卡片恰好组成“光荣”一词的情况有 2 种，所以这一事件的样本点的个数为 2.

方法总结 三种样本点求法的选择

(1)穷举法:适用于情境比较简单,样本点个数不是很多的样本点个数求解问题;

(2)列表法:尤其适用于试验中包含两类元素,试验结果相对较多的样本点个数求解问题;

(3)树状图法:适用于按顺序排列的较复杂的样本点个数求解问题.

6.【解】(1)同时掷红、蓝两颗质地均匀的正方体骰子,用(x,y)表示结果,其中x表示红色骰子向上一面的点数,y表示蓝色骰子向上一面的点数,结果如表所示.

x \ y	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

则样本空间$\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$.

(2)由题意可知,$\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$所表示的事件为“掷红、蓝两颗骰子,掷出的向上一面的点数相同”.

(3)由题意可知,事件“向上一面的点数之和不超过5”,即$x+y\leqslant 5$,用集合表示为$\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,$

$1)\}$.

易错警示 列举样本点时重复或遗漏致错

在列举样本点时一定要按顺序书写，做到不重不漏，例如本题可以按照 $x=1,y=1,2,3,4,5,6$；$x=2,y=1,2,3,4,5,6$；…的顺序书写，避免重复或遗漏，保证答案的正确性.

7. C 【解析】对于 A，$|x|<0$ 的解集为 $\varnothing$，即"集合 $\{x\,|\,|x|<0\}$ 为空集"是必然事件，**故 A 错误.**

对于 B，若 $y=f(x)$ 是奇函数，则当 0 在定义域内时，$f(0)=0$ 成立，当 0 不在定义域内时，$f(0)=0$ 不一定成立，即事件"若 $y=f(x)$ 是奇函数，则 $f(0)=0$"可能发生，也可能不发生，**故 B 错误.**

对于 C，若 $\log_a(x-1)>0$，则①当 $a>1$ 时，$x-1>1$，即 $x>2$；②当 $0<a<1$ 时，$0<x-1<1$，即 $1<x<2$. 故"若 $\log_a(x-1)>0$，则 $x>1$"是必然事件，**故 C 正确.**

对于 D，"对顶角不相等"是不可能事件，**故 D 错误.**

10. 1. 2　事件的关系和运算

对点上分

1. A 【解析】事件 $A=$"点数大于 2 且小于 5"$=\{3,4\}$，事件 $B=$"点数为偶数"$=\{2,4,6\}$，则 $A\cap B=\{4\}$，故事件 $A\cap B=$"点数为 4". **故 A 正确.**

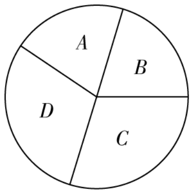
2. C 【解析】事件 A 表示两次都投中，事件 D 表示至少有一次投中，即表示两次都投中或恰有一次投中，故 $A\subseteq D$，**故 A 正确；**

事件 B 表示两次都未投中，事件 B 和事件 D 不能同时发生，故 $B\cap D=\varnothing$，**故 B 正确；**

事件 $A\cup B$ 表示两次都投中或两次都未投中，而事件 $B\cup D$ 表示两次都未投中、两次都投中或恰有一次投中，则 $A\cup B\neq B\cup D$，**故 C 错误；**

事件 $A\cup C$ 表示两次都投中或恰有一次投中，故 $A\cup C=D$，**故 D 正确.**

3. D 【解析】由于事件 A,B,C,D 彼此互斥，且 $A\cup B\cup C\cup D$ 是必然事件，故其事件的关系如图所示.



由图可知，任何一个事件与其余三个事件中的两个事件的和事件互斥，但不对立，所以 $A\cup B$ 与 C 是互斥事件，但不是对立事件，$B\cup C$ 与 D 是互斥事件，但不是对立事件，**故 A，B 错误**；

任何两个事件的和事件与其余两个事件的和事件互为对立事件，**故 C 错误**；

任何一个事件与其余三个事件的和事件互斥，且互为对立，**故 D 正确**.

4. B 【解析】当取出的两个球都是黑球时，“至少有一个黑球”与“都是黑球”同时发生，故 A 中的两个事件不是互斥事件；

从袋中任取两个球，则可能的情况有“一个黑球，一个红球”“两个黑球”“两个红球”，所以“恰有一个黑球”与“恰有两个黑球”不能同时发生，但能同时不发生，故 B 中的两个事件互斥而不对立；

当取出的两个球是“一个黑球，一个红球”时，“至少有一个黑球”与“至少有一个红球”同时发生，故 C 中的两个事件不是互斥事件；

“至少有一个黑球”包含“一个黑球，一个红球”“两个黑球”两种情况，与“都是红球”是对立事件. **故选 B.**

方法总结 互斥事件与对立事件的辨析

(1) 若两个事件互为对立事件，则这两个事件的并集等于样本空间；

(2) 若两个事件为互斥事件，其中一个事件发生则另一个事件必然不发生，但这两个事件的并集不一定等于样本空间；

(3) 对立事件是一种特殊的互斥事件.

5.【解】设 2 个红球的编号分别为 1,2,2 个白球的编号分别为 3,4,从装有这 4 个球的口袋中任取 2 个球,则样本空间 $\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$.

设 $A=$"至少有 1 个白球",则 $A=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$;

设 $B=$"都是白球",则 $B=\{(3,4)\}$;

设 $C=$"至少有 1 个红球",则 $C=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$;

设 $D=$"都是红球",则 $D=\{(1,2)\}$.

(1)$B\subseteq A$,故"至少有 1 个白球"包含"都是白球".

(2)因为 $A\cap C=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$,所以"至少有 1 个白球"和"至少有 1 个红球"不互斥.

(3)因为 $A\cup D=\Omega$,$A\cap D=\varnothing$,所以"至少有 1 个白球"和"都是红球"为对立事件.

能力上分

1. BCD 【解析】因为 $J_1\cup J_2$ 表示前 2 次测试成绩中至少有 1 次及格,**故 A 错误**;

因为 $J_2\cup J_3$ 表示第 2 次和第 3 次测试成绩中至少有 1 次及格,所以 $\overline{J_2\cup J_3}$ 表示后 2 次测试成绩均不及格,**故 B 正确**;

$J_1\cap J_2\cap J_3$ 表示 J_1,J_2,J_3 同时发生,即表示 3 次测试成绩均及格,**故 C 正确**;

$\overline{J_i}(i=1,2,3)$ 表示第 i 次测试成绩不及格,所以 $\overline{J_1}\cap\overline{J_2}\cap\overline{J_3}$ 表示 3 次测试成绩均不及格,**故 D 正确. 故选** BCD.

2. A 【解析】$Q=$"摸到的 2 个球均为白球或均为黑球",$T=$"摸到 1 个白球,1 个黑球",则 $Q\cup T=\Omega$ 且 $Q\cap T=\varnothing$,$\therefore$ 事件 Q 与事件 T 为对立事件,A **错误**;

$\because$ 事件 N 与事件 P 不能同时发生,$\therefore$ N 与 P 互斥,B **正确**;

事件 $M=$"两次摸到的都是白球或 1 个是白球,1 个是黑球",则 $M\cup P=\Omega$ 且 $M\cap P=\varnothing$,$\therefore$ M 与 P 对立,C **正确**;

$N\cup P=Q$,D **正确. 故选** A.

3. ABC　【解析】事件 A＝"取出的鞋不成双"，事件 D＝"取出的鞋一只是左脚的，一只是右脚的，但不是一双鞋"，D 发生时 A 一定发生，所以 $D\subseteq A$，A 正确；

事件 C＝"取出的鞋都是一只脚的"，包含"都是左脚"和"都是右脚"两种情况，事件 D＝"取出的鞋一只是左脚的，一只是右脚的，但不是一双鞋"，故 $A=C\cup D$，B 正确；

事件 B 与事件 D 不可能同时发生，所以 B 与 D 互斥，C 正确；

除了事件 C 和事件 D 所包含的情况外，还有"取出的鞋是一双"的情况，所以事件 C 与事件 D 不对立，D 错误. 故选 ABC.

4. 小明选的书是 2024 年以前出版的中文版的数学书　【解析】因为 A＝"小明选的书是数学书"，B＝"小明选的书是中文版的书"，C＝"小明选的书是 2024 年或 2024 年以后出版的书"，所以 $A\cap B\cap\overline{C}$＝"小明选的书是 2024 年以前出版的中文版的数学书".

5.【解】(1) 从 40 张扑克牌中，任取 1 张，"抽出红桃"和"抽出黑桃"不可能同时发生，所以 A 与 B 是互斥事件.

因为从 40 张扑克牌中，任取 1 张，还有可能抽出方块或梅花，所以事件 A 与 B 不是对立事件.

故 A 与 B 是互斥事件，不是对立事件.

(2) 从 40 张扑克牌中，任取 1 张，"抽出红色牌"和"抽出黑色牌"不可能同时发生且其中必有一个发生，

所以 C 与 D 既是互斥事件，又是对立事件.

(3) 从 40 张扑克牌中，任取 1 张，若抽出的是黑桃，则一定是黑色牌，

若抽出的是黑色牌，则不一定是黑桃，有可能是梅花，

所以事件 B 发生时，事件 D 一定发生，而事件 D 发生时，事件 B 不一定发生，

所以 $B\subseteq D$.

(4)从 40 张扑克牌中,任取 1 张,抽出的牌点数大于 9,即牌的点数为 10,一定是 5 的倍数,

而抽出的牌点数为 5 的倍数,则牌的点数为 5 或 10,

所以事件 F 发生时,事件 E 一定发生,而事件 E 发生时,事件 F 不一定发生,

所以 $F\subseteq E$.

(5)从 40 张扑克牌中,任取 1 张,

若抽出的是黑桃,且牌的点数大于 9,则抽出的一定是黑桃 10,

所以 $B\cap F=G$.

10.1.3　古典概型

对点上分

1. D　【解析】由于必然事件的概率为 1,**故①正确;**

如果某种彩票的中奖概率为$\frac{1}{1\ 000}$,那么买 1 000 张这种彩票,可能中奖,也可能不中奖,**故②错误;**

由于任意事件的概率 P 满足 $0\leqslant P\leqslant 1$,**故③错误;**

对立事件一定是互斥事件,但互斥事件不一定是对立事件,**故④错误;**

抛掷两枚质地均匀的硬币一次,可能的情况有(正,正),(正,反),(反,正),(反,反),共 4 种,出现一正一反的概率是$\frac{1}{2}$,**故⑤错误. 故选 D.**

2. C　【解析】因为必然事件的概率为 1,**所以 A,B 错误;**

因为不可能事件的概率为 0,**所以 D 错误;**

根据概率的定义可知,灯泡的合格率是 99%,从一批灯泡中任取一个是合格品的可能性为 99%,**故 C 正确.**

3. C　【解析】对于 A,在平面直角坐标系内,横坐标和纵坐标都是整数的点有无数个,不满足有限性,故不属于古典概型;

对于 B,某射手射击一次,命中 1 环,2

环,…,10 环或脱靶的概率不相同,不满足等可能性,故不属于古典概型;

对于 C,某小组有男生 5 人,女生 3 人,从中任选 1 人做演讲,满足有限性,且任选 1 人与性别无关,是等可能的,故属于古典概型;

对于 D,一只使用中的灯泡寿命长短不满足等可能性,故不属于古典概型.

易错警示 **未正确理解古典概型特征而致错**

判断一个概率模型是不是古典概型,主要从其是否满足有限性和等可能性两个特征判断,两个特征缺一不可.本题中 A 不满足有限性,B,D 不满足等可能性,因此均不是古典概型.

4. ABD 【解析】对于 A,由于点数之和出现的可能性不相等,故不是古典概型;

对于 B,样本点个数是无限的,故不是古典概型;

对于 C,满足古典概型的有限性和等可能性,故是古典概型;

对于 D,样本点既不是有限个也不具有等可能性,故不是古典概型.

5. B 【解析】根据题意,记 4 部著作中《几何原本》为 a,《光学》为 b,《图形的分割》为 c,《已知数》为 d,则从 4 部著作中任意抽取 2 部的可能情况有 ab,ac,ad,bc,bd,cd,共 6 种,抽到《光学》的可能情况有 ab,bc,bd,共 3 种,所以抽到《光学》的概率 $P=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. **故 B 正确.**

6. D 【解析】由题意,先后抛掷一枚质地均匀的硬币三次,所有可能的情况有(正,正,正),(正,正,反),(正,反,正),(反,正,正),(正,反,反),(反,正,反),(反,反,正),(反,反,反),共 8 种,其中至少一次正面朝上所包含的情况有(正,正,正),(正,正,反),(正,反,正),(反,正,正),(正,反,反),(反,正,反),(反,反,正),共 7 种,所以至少一次正面朝上的概率 $P=\frac{7}{8}$. **故 D 正确.**

7. BCD 【解析】设红色骰子朝下的面上

的点数为 m，蓝色骰子朝下的面上的点数为 n，样本点为 (m,n)，则样本空间 $\Omega=\{(m,n)\mid m,n\in\{1,2,3,4\}\}$，则样本空间 Ω 中样本点共有 16 个，事件 A="两枚骰子的点数之和为 5"，则 $A=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$，$\therefore P(A)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$，**故 A 错误；**

事件 B="红色骰子的点数是偶数"，则 $B=\{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$，$\therefore P(B)=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$，**故 B 正确；**

事件 C="两枚骰子的点数相同"，则 $C=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$，$\therefore P(C)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$，**故 C 正确；**

事件 D="至少一枚骰子的点数是偶数"，则 $D=\{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(1,2),(3,2),(1,4),(3,4)\}$，$\therefore P(D)=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$，**故 D 正确.**

易错警示 **穷举法求解样本点时出现遗漏而致错**

计算样本点时常用的方法有穷举法、列表法、画树状图法. 采用穷举法写随机试验的结果时，要按照一定的顺序，注意不能重复也不能遗漏，准确写出满足某种特殊条件的试验结果是正确求解概率的基础.

8. $\frac{5}{18}$　**【解析】**由题意得，抽奖两次滚动盘上出现的 2 个数字的情况为 $(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),\cdots,(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)$，共 36 种.

两次抽奖奖金之和为 200 元包括 3 种情况：

①第一次与第二次都中二等奖，其包含的情况为 $(1,3),(3,1),(1,1),(3,3)$；

②第一次中一等奖，第二次中三等奖，其包含的情况为 $(6,5),(6,4),(6,2)$；

③第一次中三等奖,第二次中一等奖,其包含的情况为(5,6),(4,6),(2,6).

所以该顾客两次抽奖后获得的奖金之和为200元的概率 $P=\frac{4+3+3}{36}=\frac{5}{18}$.

9.【解】用 a_1,a_2 表示2个白球,用 b_1,b_2,b_3 表示3个黑球.

(1)采取有放回抽取方式,从中依次摸出2个球,样本空间 $\Omega_1=\{a_1a_1,a_1a_2,a_1b_1,a_1b_2,a_1b_3,a_2a_1,a_2a_2,a_2b_1,a_2b_2,a_2b_3,b_1a_1,b_1a_2,b_1b_1,b_1b_2,b_1b_3,b_2a_1,b_2a_2,b_2b_1,b_2b_2,b_2b_3,b_3a_1,b_3a_2,b_3b_1,b_3b_2,b_3b_3\}$,每个样本点都是等可能发生的,$n(\Omega_1)=25$,

设事件 $A=$“2个球颜色不同”,则 $A=\{a_1b_1,a_1b_2,a_1b_3,a_2b_1,a_2b_2,a_2b_3,b_1a_1,b_1a_2,b_2a_1,b_2a_2,b_3a_1,b_3a_2\}$,$n(A)=12$,

所以 $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega_1)}=\frac{12}{25}$.

(2)采取不放回抽取方式,从中依次摸出2个球,样本空间 $\Omega_2=\{a_1a_2,a_1b_1,a_1b_2,a_1b_3,a_2a_1,a_2b_1,a_2b_2,a_2b_3,b_1a_1,b_1a_2,b_1b_2,b_1b_3,b_2a_1,b_2a_2,b_2b_1,b_2b_3,b_3a_1,b_3a_2,b_3b_1,b_3b_2\}$,每个样本点都是等可能发生的,$n(\Omega_2)=20$,

设事件 $B=$“2个球颜色不同”,则 $B=\{a_1b_1,a_1b_2,a_1b_3,a_2b_1,a_2b_2,a_2b_3,b_1a_1,b_1a_2,b_2a_1,b_2a_2,b_3a_1,b_3a_2\}$,$n(B)=12$,

所以 $P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega_2)}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$.

易错警示 **不能正确理解古典概型中的放回与不放回问题而致错**

(1)关于不放回抽样,计算样本空间中样本点的个数时,既可以看作是有顺序的,也可以看作是无顺序的,其最后结果是一致的.但不论选择哪一种方式,观察的角度必须一致,否则会产生错误.

(2)关于有放回抽样,应注意在连续两次取出的过程中,因为先后顺序不同,所以 a_1b_1 与 b_1a_1 不是同一个样本点.

(3)解题的关键是要清楚无论是不放回抽样还是有放回抽样,每一个球被取出的机会都是相等的.

10. C　【解析】连续抛两次骰子得到的点数分别是 m,n,以数组(m,n)表示得到的结果,则样本点的总数为 $6\times6=36$,其中点 $P(m,n)$在直线 $x+y=8$ 上包含的样本点有$(2,6)$,$(3,5)$,$(4,4)$,$(5,3)$,$(6,2)$,共 5 个,则点 $P(m,n)$在直线 $x+y=8$ 上的概率 $P=\frac{5}{36}$. **故 C 正确.**

11. C　【解析】由已知,先后两次抛掷同一枚质地均匀的骰子,可能的情况有 36 种.

当 $a=1$ 时,$b=3$ 符合要求,有 1 种情况;

当 $a=2$ 时,$b=2,3$ 符合要求,有 2 种情况;

当 $a=3$ 时,$b=1,2,3,4,5$ 符合要求,有 5 种情况;

当 $a=4$ 时,$b=3,4$ 符合要求,有 2 种情况;

当 $a=5$ 时,$b=3,5$ 符合要求,有 2 种情况;

当 $a=6$ 时,$b=6$ 符合要求,有 1 种情况.

所以能够构成等腰三角形的情况共有 13 种,因此所求概率为$\frac{13}{36}$. **故 C 正确.**

12. C　【解析】$M=\{1,3\}$,$N=\{1,3,5,7\}$,从集合 M,N 中各任取一个数,分别记为 x,y,样本空间中包含的样本点总数 $n=2\times4=8$. $\log_3(xy)$为整数包含的样本点有$(1,1)$,$(1,3)$,$(3,1)$,$(3,3)$,共 4 个,

$\therefore$ $\log_3(xy)$为整数的概率 $P=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$. **故 C 正确.**

13. B　【解析】向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角等价于 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$ 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不同向,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=m+n>0$ 且 $m\neq n$. 易知 $\boldsymbol{a}$ 的坐标共有 16 种情况,分别是$(-2,-2)$,$(-2,-1)$,$(-2,1)$,$(-2,2)$,$(-1,-2)$,$(-1,-1)$,$(-1,1)$,$(-1,2)$,$(1,-2)$,$(1,-1)$,$(1,1)$,$(1,2)$,$(2,-2)$,$(2,-1)$,$(2,1)$,$(2,2)$,满足条件的 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为$(-1,2)$,$(2,-1)$,$(1,2)$,$(2,1)$,共 4

种，故所求的概率为$\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$. **故 B 正确.**

14.【解】$A\cap B=B$ 等价于 $B\subseteq A$，记该事件为 D，由于 $a\in A,b\in A$，故(a,b)的取值情况如表所示.

a \ b	1	2	3
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)

样本空间共有 9 个样本点，方程 $x^2-ax+b=0$ 的判别式 $\Delta=a^2-4b$，

当(a,b)取(1,1)，(1,2)，(1,3)，(2,2)，(2,3)，(3,3)时，$\Delta=a^2-4b<0$，则 $B=\varnothing$，$B\subseteq A$；

当(a,b)取(2,1)时，$\Delta=a^2-4b=0$，$B=\{1\}$，$B\subseteq A$；

当(a,b)取(3,1)时，$\Delta=a^2-4b=5>0$，但方程有两个无理数根，不符合题意；

当(a,b)取(3,2)时，$\Delta=a^2-4b=1>0$，$B=\{1,2\}$，$B\subseteq A$.

因此事件 D 有 8 个样本点，故所求概率 $P(D)=\frac{8}{9}$.

能力上分

1. D　【解析】样本空间 $\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$，共 36 个样本点.

事件 $A\cup B$ 包含的样本点有(1,4)，(2,3)，(3,2)，(4,1)，(2,1)，(2,2)，(2,4)，(2,5)，(2,6)，(1,2)，(4,2)，(5,2)，(6,2)，共 13 个样本点.

所以 $P(A\cup B)=\frac{13}{36}$. **故选 D.**

2. B

攻略上分 本题求点 P 落在 x 轴上的概率，即无需考虑横坐标的情况，只需要考虑纵坐标的情况，抓住问题本质，将问题进行转化，简化样本空间，便于求概率.

【解析】由题可知，点 P 落在 x 轴上的概率，即纵坐标为 0 的概率，因为纵坐标是从集合 $M=\{-1,0,1,-2\}$ 中任取一个，有 4 种可能的情况，所以点 P 落在 x 轴上的概率为 $\frac{1}{4}$. 故选 B.

3. C 【解析】从袋子中随机取出两个球，其样本空间 $\Omega=\{$(红 1，红 2)，(红 1，黄 1)，(红 1，黄 2)，(红 1，黄 3)，(红 1，黄 4)，(红 2，黄 1)，(红 2，黄 2)，(红 2，黄 3)，(红 2，黄 4)，(黄 1，黄 2)，(黄 1，黄 3)，(黄 1，黄 4)，(黄 2，黄 3)，(黄 2，黄 4)，(黄 3，黄 4)$\}$，共 15 个样本点.

其中两个球颜色相同的情况有 7 种，颜色不同的情况有 8 种，故取出的两个球颜色相同的概率为 $\frac{7}{15}$，颜色不同的概率为 $\frac{8}{15}$，A 不正确.

至少有一个红球被取出的情况有 9 种，故其概率为 $\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$，B 不正确.

这两个球上的数字相同的情况有 2 种，故其概率为 $\frac{2}{15}$，C 正确.

这两个球上的数字之积为偶数的情况有 12 种，其概率为 $\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$，D 不正确. 故选 C.

4. D 【解析】从两名男生(记为 a 和 b)、两名女生(记为 1 和 2)中任意抽取两人，在放回简单随机抽样方式下的样本空间 $\Omega_1=\{(a,b),(b,a),(a,1),(1,a),(a,2),(2,a),(b,1),(1,b),(b,2),(2,b),(1,2),(2,1),(a,a),(b,b),(1,1),(2,2)\}$，共 16 个样本点，

其中抽到的两人一个是男生，一个是女生的情况有 $(a,1),(1,a),(a,2),(2,a),(b,1),(1,b),(b,2),(2,b)$，共 8 个

样本点，

所以在放回简单随机抽样方式下，抽到的两人一个是男生，一个是女生的概率为$\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$.

在不放回简单随机抽样方式下的样本空间 $\Omega_2=\{(a,b),(b,a),(a,1),(1,a),(a,2),(2,a),(b,1),(1,b),(b,2),(2,b),(1,2),(2,1)\}$，共 12 个样本点，

其中抽到的两人一个是男生，一个是女生的情况有$(a,1),(1,a),(a,2),(2,a),(b,1),(1,b),(b,2),(2,b)$，共 8 个样本点，

所以在不放回简单随机抽样方式下，抽到的两人一个是男生，一个是女生的概率为$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$. **故选 D.**

5.【解】(1) 由频率分布直方图中所有小矩形面积之和为 1，

可得$(0.005+0.010+0.020+a+0.025+0.010)\times10=1$，解得 $a=0.030$.

(2) 成绩来自$[40,50)$的学生有 $40\times0.05=2$(名)，记为 a,b，成绩来自$[90,100]$的学生有 $40\times0.1=4$(名)，记为 c,d,e,f.

(i) 该试验的样本空间 $\Omega=\{ab,ac,ad,ae,af,bc,bd,be,bf,cd,ce,cf,de,df,ef\}$.

(ii) 设 M="这两名学生数学成绩至多有一名及格"，则 $M=\{ab,ac,ad,ae,af,bc,bd,be,bf\}$，共 9 个样本点，

所以这两名学生数学成绩至多有一名及格的概率 $P(M)=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$.

10.1.4 概率的基本性质

对点上分

1. A 【解析】根据概率的性质可知，当 A,B 不互斥时，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，**故 A 正确**；

对于两个不可能事件来说，同时发生的概率与恰有一个发生的概率相等，均为零，**故 B 错误**；

当 $P(A)+P(B)=1$ 时，事件 A 与事件 B

不一定互斥，事件 A 与 B 也不一定是对立事件，**故 C 错误；**

当事件 A 与事件 B 互斥时，事件 A,B 中至少有一个发生的概率与 A,B 中恰有一个发生的概率相等，**故 D 错误.**

2. C　【解析】$\because P(B)=1-P(\overline{B}),P(\overline{B})=\frac{2}{3}$，$\therefore P(B)=\frac{1}{3}$. $\because$ 事件 A,B 是互斥事件，$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$. **故 C 正确.**

3. C　【解析】由题知，$P(A)=\frac{12}{48}=\frac{1}{4}$，$P(B)=\frac{8}{48}=\frac{1}{6}$，因为 $P(A\cup B)=\frac{1}{3}$，所以 $P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{3}$，即 $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-P(AB)=\frac{1}{3}$，解得 $P(AB)=\frac{1}{12}$. **故 C 正确.**

4. CD　【解析】由题图知参加兴趣小组的共有 $6+7+8+8+10+10+11=60$（人），只属于数学、英语、音乐小组的人数分别为 10，6，8，所以只属于音乐小组的概率为 $\frac{8}{60}=\frac{2}{15}$，只属于英语小组的概率为 $\frac{6}{60}=\frac{1}{10}$，**故 A，B 错误；**

“至少 2 个小组”包含“2 个小组”和“3 个小组”两种情况，所以该成员属于至少 2 个小组的概率为 $\frac{11+10+7+8}{60}=\frac{3}{5}$，**故 C 正确；**

“不超过 2 个小组”包含“1 个小组”和“2 个小组”两种情况，其对立事件是“3 个小组”，所以该成员属于不超过 2 个小组的概率是 $1-\frac{8}{60}=\frac{13}{15}$，**故 D 正确.**

5.【解】(1) 由题意知派出医生不超过 2 人的概率为 0.56，从题表中可以看出派出医生不超过 2 人包括不派医生，派出 1 人，派出 2 人，即 $0.1+0.16+x=0.56$，解得 $x=0.3$.

(2) 由派出医生至多 4 人的概率为 0.96，得 $0.96+z=1$，解得 $z=0.04$.

由派出医生至少 3 人的概率为 0.44，得 $y+0.2+z=0.44$，则 $y=0.44-0.2-0.04=0.2$. 故 $z=0.04$，$y=0.2$.

6.【解】(1) 设事件 A_k =“电话响第 k 声时被接”，其中 $k\in\mathbf{N}^*$，那么事件 A_k 间彼此互斥，设事件 A =“打进的电话至多响 4 声时被接”，则事件 A 表示有可能响 1 声、2 声、3 声、4 声被接，根据互斥事件的概率加法公式，

得 $P(A)=P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)=0.1+0.2+0.3+0.35=0.95$.

(2)“打进的电话响 4 声而不被接”是事件 A 的对立事件，记为 $\overline{A}$. 根据对立事件的概率公式，得 $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.95=0.05$.

方法总结 对于一个较复杂的事件，一般可以将其分解成几个简单的事件，当这些事件彼此互斥时，原事件的概率等于这些事件概率的和，如本题第一问. 对于从正面考虑时情况较多的事件，“正难则反”是一种很好的解决问题的方法，可以从其对立事件的角度进行求解，如本题第二问.

能力上分

1. B 【解析】因为事件 A,B,C 两两互斥，所以 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$，$P(A\cup C)=P(A)+P(C)$.

又 $P(A)=\dfrac{1}{3}$，$P(A\cup B)=\dfrac{7}{12}$，$P(A\cup C)=\dfrac{1}{2}$，可得 $\begin{cases}\dfrac{1}{3}+P(B)=\dfrac{7}{12},\\ \dfrac{1}{3}+P(C)=\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $P(B)=\dfrac{1}{4}$，$P(C)=\dfrac{1}{6}$，所以 $P(B\cup C)=P(B)+P(C)=\dfrac{5}{12}$.

2. D 【解析】假设运动鞋的左脚为 L_1，右脚为 R_1，凉鞋的左脚为 L_2，右脚为 R_2，则选出两 2 只鞋包含了 (L_1,R_1)，(L_1,L_2)，(L_1,R_2)，(R_1,L_2)，(R_1,R_2)，(L_2,R_2) 6 种，

其中事件 A 包含了 (L_1,L_2)，(L_1,R_2)，(R_1,L_2)，(R_1,R_2) 4 种，

事件 $\overline{A}$ 包含了 (L_1,R_1)，(L_2,R_2) 2 种，

事件 B 包含了 (L_1,L_2)，(R_1,R_2) 2 种.

$B\subseteq A$，故 A 错误；

$P(\overline{A})=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{1}{3}$，$P(\overline{A}B)=0$，故 B，C 错误；

$P(\overline{A}+B)=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-0=\frac{2}{3}$，故 D 正确. 故选 D.

3. 0. 64 【解析】该人群中任找一人，其血型为 A，B，AB，O 的事件分别记为 A'，B'，C'，D'，由已知得 $P(A')=0.28$，$P(B')=0.29$，$P(C')=0.08$，$P(D')=0.35$.

因为 B，O 型血可以输给甲，所以"在该人群中任找一人，其血可以输给甲"为事件 $B'\cup D'$，依据互斥事件概率的加法公式得到 $P(B'\cup D')=P(B')+P(D')=0.29+0.35=0.64$. 故在该人群中任找一人，其血可以输给甲的概率为 0. 64.

4.【解】设事件 A="射中 10 环"，B="射中 9 环"，C="射中 8 环"，D="射中 7 环"，E="射中 7 环以下"，显然事件 A，B，C，D，E 两两互斥.

(1)射中 10 环或 9 环的概率为 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.1+0.2=0.3$，所以射中 10 环或 9 环的概率为 0. 3.

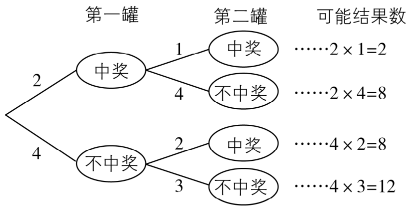
(2)至少射中 7 环表示有可能射中 7 环、8 环、9 环或 10 环，所以其概率为 $P(A\cup B\cup C\cup D)=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=0.1+0.2+0.3+0.3=0.9$.

(3)至多射中 8 环表示有可能射中 8 环、7 环或者射中 7 环以下，所以其概率为 $P(C\cup D\cup E)=P(C)+P(D)+P(E)=0.3+0.3+0.1=0.7$.

一题多解 (2)因为"至少射中 7 环"与"射中 7 环以下"互为对立事件，所以至少射中 7 环的概率为 $1-P(E)=1-0.1=0.9$.

(3)因为"至多射中 8 环"与"射中 10 环或 9 环"互为对立事件，所以至多射中 8 环的概率为 $1-P(A\cup B)=1-0.3=0.7$.

5.【解】(1)设事件 A =“能中奖”,事件 B =“恰有一罐中奖”,事件 A_1 =“第一罐中奖”,事件 A_2 =“第二罐中奖”,那么事件 A_1A_2 =“两罐都中奖”,$A_1\overline{A_2}$ =“第一罐中奖,第二罐不中奖”,$\overline{A_1}A_2$ =“第一罐不中奖,第二罐中奖”,且 $B=A_1\overline{A_2}\cup\overline{A_1}A_2$,因为 $A_1\overline{A_2}$,$\overline{A_1}A_2$ 互斥,所以根据互斥事件的概率加法公式,可得 $P(B)=P(A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1}A_2)$,我们借助树状图来求相应事件的样本点数.



可以得到,样本空间 Ω 包含的样本点个数 $n(\Omega)=6\times5=30$,且每个样本点对应的事件都是等可能发生的,因为 $n(A_1\overline{A_2})=8$,$n(\overline{A_1}A_2)=8$,所以 $P(B)=\frac{8}{30}+\frac{8}{30}=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$,故恰有一罐中奖的概率为$\frac{8}{15}$.

(2)因为 A_1A_2,$A_1\overline{A_2}$,$\overline{A_1}A_2$ 两两互斥,所以根据互斥事件的概率加法公式,可得 $P(A)=P(A_1A_2)+P(A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1}A_2)$,由(1)可知样本空间包含的样本点个数 $n(\Omega)=6\times5=30$,$n(A_1A_2)=2$,$n(A_1\overline{A_2})=8$,$n(\overline{A_1}A_2)=8$,所以 $P(A)=\frac{2}{30}+\frac{8}{30}+\frac{8}{30}=\frac{18}{30}=\frac{3}{5}$,故能中奖的概率为$\frac{3}{5}$.

10.1 节测上分

1. C 【解析】①在一条公路上,交警记录某一小时通过某处的汽车超过 300 辆,是随机现象;

②若 a 为整数,则 $a+1$ 为整数,是必然现象;

③发射一枚炮弹,命中目标,是随机现象;

④检查流水线上某一件产品是合格品,是随机现象.

故是随机现象的有 3 个,**故 C 正确**.

2. C　【解析】先后抛掷两枚质地均匀的硬币，有先后顺序，则此试验的样本空间为{(正面,正面),(正面,反面),(反面,正面),(反面,反面)}. **故 C 正确.**

3. A　【解析】①不是古典概型，因为从区间[1,10]内任意取出一个数，有无数个对象可取，所以不满足"有限性"；

②是古典概型，因为试验结果只有 10 个，而且每个数被取到的可能性相等，即满足"有限性"和"等可能性"；

③不是古典概型，在一个正方形 $ABCD$ 内画一点 P，有无数个点，不满足"有限性"；

④不是古典概型，因为硬币质地不均匀，因此两面出现的可能性不相等. **故 A 正确.**

4. BC　【解析】该事件的样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，$C_i=\{i\}$，$i=1,2,3,4,5,6$，$D_1=\{1,2\}$，$D_2=\{3,4,5,6\}$，$D_3=\{5,6\}$. 对于 A，$C_1=\{1\}\neq D_1$，**故 A 错误**；对于 B，$C_3=\{3\}\subseteq D_2$，**故 B 正确**；对于 C，$D_1\cup D_2=\Omega$，**故 C 正确**；对于 D，$D_2\cap D_3=\{5,6\}\neq D_2$，**故 D 错误.**

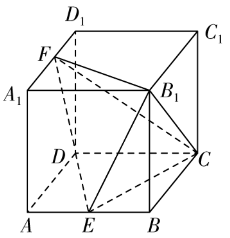
5. C　【解析】从 A,B,C,D 四个学习小组中随机抽取两个小组有 AB,AC,AD,BC,BD,CD，共 6 种结果，其中 A 组和 B 组恰有一个组被抽到的结果有 AC,AD,BC,BD，共 4 种结果，所以 A 组和 B 组恰有一个组被抽到的概率为 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

6. AB　【解析】由题意抽奖者从中任取 1 个球的样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，事件 $A=\{1,3,5,7\}$，事件 $B=\{2,4,6,8\}$，事件 $C=\{6,7,8\}$，事件 $D=\{1,2,3,4\}$，所以 $A\cap C=\{7\}\neq\varnothing$，$A\cup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\varnothing$，$B\cap C=\{6,8\}\neq\varnothing$，$C\cap D=\varnothing$ 且 $C\cup D=\{1,2,3,4,6,7,8\}\subseteq\Omega$，所以事件 A 与事件 C 不互斥，事件 A 与事件 B 互为对立事件，事件 B 与事件 C 不互斥，事件 C 与事件 D 互斥但不对立，**故 A，B 正确，C，D 错误.**

7. D　【解析】由题可知，$P(A\cup B)=P(A)+$

$P(B)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$，又 $P(A)=2P(B)$，所以 $2P(B)+P(B)=\frac{5}{6}$，解得 $P(B)=\frac{5}{18}$，$P(A)=\frac{5}{9}$，所以 $P(\overline{A})=1-P(A)=\frac{4}{9}$. **故 D 正确.**

8. ABD 【解析】如图，



$\because$ 点 B_1,C,E,F 不共面，$\therefore$ 两条直线为异面直线，**故 A 正确；**

过四个不同点的两条直线共 3 种情况，其中当一条直线过 B_1,F，另一条直线过 C,E 时，这两条直线互相垂直，所以两条直线互相垂直的概率为 $\frac{1}{3}$，**故 B 正确；**

两条直线互相平行的概率为 0，而两条直线互相垂直的概率小于 1，两条直线互相平行与互相垂直是互斥事件，但不是对立事件，**故 C 错误；**

B_1C,B_1E,B_1F 中，只有 B_1C 与 AC_1 垂直，且当 $B_1C\perp AC_1$ 时，EF 与 AC_1 不垂直，**故 D 正确.**

9. C 【解析】在加数都大于 2 的条件下，16 可以拆成 3+13，4+12，5+11，6+10，7+9，8+8，9+7，10+6，11+5，12+4，13+3，共有 11 种情况，其中拆成的和式中两个加数均为质数的有 3+13，5+11，13+3，11+5，共 4 种情况. 所以拆成的和式中，在加数都大于 2 的条件下，两个加数均为素数的概率 $P=\frac{4}{11}$. **故 C 正确.**

10. A 【解析】从袋中任取 1 个球，记事件 A="得到红球"，B="得到黑球"，C="得到黄球"，D="得到绿球"，则事件 A,B,C,D 彼此互斥. 由已知可得 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B\cup C)=P(B)+P(C)=\frac{5}{12}$，$P(C\cup$

$D)=P(C)+P(D)=\frac{5}{12}$，则 $P(\overline{A})=1-P(A)=\frac{2}{3}$，即 $P(B\cup C\cup D)=P(B)+P(C)+P(D)=\frac{2}{3}$，所以 $P(D)=\frac{2}{3}-\frac{5}{12}=\frac{1}{4}$，则 $P(C)=\frac{5}{12}-\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$，故从中任取 1 个球，得到黄球的概率是$\frac{1}{6}$. **故 A 正确.**

11. ①② 【解析】对于①，样本空间 $\Omega=\{(1,1),(1,0),(0,1),(0,0)\}$，① **正确；**

对于②，事件 B 包含两种情况，A 元件断开且 B 元件正常，A 元件正常且 B 元件正常，故事件 $B=\{(0,1),(1,1)\}$，② **正确；**

对于③，"电路是断路"，说明 A 元件和 B 元件至少有一个断开，即事件"电路是断路"可以用 $\overline{A}\cup\overline{B}$（或 $\overline{A}+\overline{B}$）表示，③**错误；**

对于④，"电路是通路"，说明两个元件都正常，所以事件"电路是通路"可以用 $A\cap B$（或 AB）表示，④**错误.**

12. $\frac{2}{3}$ 【解析】由题可得 $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，则 $P(\overline{B})=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$，且事件 $A,\overline{B}$ 互斥，所以事件 $A+\overline{B}$ 的概率为 $P(A+\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})=\frac{2}{3}$.

13.【解】记 3 个黑球编号为 W_1,W_2,W_3，2 个白球编号为 B_1,B_2.

（1）从盒中同时摸出 2 个球，试验的样本空间 $\Omega=\{W_1W_2,W_1W_3,W_1B_1,W_1B_2,W_2W_3,W_2B_1,W_2B_2,W_3B_1,W_3B_2,B_1B_2\}$，共 10 个样本点，记事件 A="2 个球颜色恰好相同"，则事件 $A=\{W_1W_2,W_1W_3,W_2W_3,B_1B_2\}$，共 4 个样本点，所以 $P(A)=\frac{2}{5}$.

（2）用 (x_1,x_2) 表示可能的结果，x_1 是第一次摸到的球编号，x_2 是第二次摸到的球编号.

所有试验的结果如表：

	W_1	W_2	W_3	B_1	B_2
W_1	(W_1,W_1)	(W_1,W_2)	(W_1,W_3)	(W_1,B_1)	(W_1,B_2)
W_2	(W_2,W_1)	(W_2,W_2)	(W_2,W_3)	(W_2,B_1)	(W_2,B_2)
W_3	(W_3,W_1)	(W_3,W_2)	(W_3,W_3)	(W_3,B_1)	(W_3,B_2)
B_1	(B_1,W_1)	(B_1,W_2)	(B_1,W_3)	(B_1,B_1)	(B_1,B_2)
B_2	(B_2,W_1)	(B_2,W_2)	(B_2,W_3)	(B_2,B_1)	(B_2,B_2)

试验的样本空间中共有 25 个样本点，记事件 B=“2 个球颜色恰好不同”，则事件 B 共有 12 个样本点，所以 $P(B)=\frac{12}{25}$.

14.【解】(1)记事件 A=“方程 $x^2+ax+b^2=0$ 有实根”，因为方程 $x^2+ax+b^2=0$ 有实根，所以二次方程的判别式 $\Delta=a^2-4b^2\geqslant 0$.

又 $a>0,b>0$，所以 $a\geqslant 2b$.

又 a 是从 1,2,3,4 四个数中任取的一个数，b 是从 1,2,3 三个数中任取的一个数，所以样本点共有 12 个，分别是(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3)(小括号中前一个数表示 a，后一个数表示 b)，这 12 个样本点对应的事件是等可能发生的. 其中事件 A 所包含的样本点有 4 个，分别是(2,1),(3,1),(4,1),(4,2)，所以方程 $x^2+ax+b^2=0$ 有实根的概率 $P(A)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

(2)记事件 B=“方程 $x^2+ax+b^2=0$ 无实根”，由(1)知 $P(B)=1-P(A)=\frac{2}{3}$.

10.2　事件的相互独立性

对点上分

1. B　【解析】对于 A，∵ $n(A\cup B)=16$，$n(A)=12$，$n(B)=8$，∴ $n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=4$，∴ 事件 A 与事件 B

可以同时发生,**故 A 错误**;

对于 B,$\because P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$,

$P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$,

$\therefore P(A)P(B)=\frac{1}{6}$,$\because n(A\cap B)=4$,

$\therefore P(AB)=\frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)}=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$,

$\therefore P(A)P(B)=P(AB)$,$\therefore$ 事件 A 与事件 B 相互独立,**故 B 正确**;

对于 C,$\because n(\Omega)=24$,$n(C)=5$,

$\therefore P(C)=\frac{n(C)}{n(\Omega)}=\frac{5}{24}$,又 $P(A)=\frac{1}{2}$,

$\therefore P(A)+P(C)\neq 1$,$\therefore$ 事件 A 与事件 C 不互为对立事件,**故 C 错误**;

对于 D,由图可知 $n(A\cap C)=0$,

$\therefore P(AC)=0$,$\therefore P(A)P(C)\neq P(AC)$,

$\therefore$ 事件 A 与事件 C 不相互独立,**故 D 错误**.

2. ACD 【解析】如第一次出现 2 点,第二次出现 1 点,此时事件 A 与 B 均发生,所以 A 与 B 不是互斥事件,**故 A 正确**;

因为此试验为掷一枚质地均匀的骰子两次,所以事件 A 是否发生对事件 B 是否发生没有影响,所以 A 与 B 是相互独立事件,**故 C 正确**;

依题意,$P(A)=\frac{1}{6}$,$P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$,

$P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,$P(D)=\frac{4}{6\times 6}=\frac{1}{9}$,$P(AC)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}=P(A)P(C)$,

即 A 与 C 相互独立,**故 D 正确**;

$P(BD)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}\neq P(B)P(D)$,即 B 与 D 不相互独立,**故 B 错误**.

3. B 【解析】由题可得

$$\begin{cases}P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.82,\\ P(B)=0.4,\\ P(AB)=P(A)P(B),\end{cases}$$

解得$\begin{cases}P(A)=0.7,\\ P(AB)=0.28.\end{cases}$

故选 B.

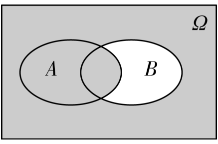
4. C

攻略上分 求复杂事件的概率时，可以直接利用公式求解，也可以先借用 Venn 图进行分析，理清关系后再求解.

【解析】由题意可得，$P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=P(A)(1-P(B))=0.3\times(1-0.3)=0.21$，则 $P(A+\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})=0.3+0.7-0.21=0.79$. **故选** C.

一题多解 根据题目条件可画出 Venn 图，如图所示，阴影部分对应的概率即为 $P(A+\overline{B})$.

由 Venn 图可知 $P(A+\overline{B})=P(\overline{B})+P(AB)$，因为事件 A 和事件 B 相互独立，所以 $P(AB)=P(A)P(B)=0.3\times0.3=0.09$，所以 $P(A+\overline{B})=(1-0.3)+0.09=0.79$. **故选** C.



5. B 【解析】元件 B,C 都断开的概率为 $\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$，则元件 B,C 至少有一个正常工作的概率为 $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，而电路是通路，即元件 A 正常工作，元件 B,C 至少有一个正常工作同时发生，所以这个电路是通路的概率为 $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$. **故选** B.

6.【解】(1) 记甲家庭猜对此灯谜为事件 A，乙家庭猜对此灯谜为事件 B，丙家庭猜对此灯谜为事件 C，

则 $P(A)=\frac{3}{4}$，$P(\overline{A}\,\overline{C})=\frac{1}{12}$，$P(BC)=\frac{1}{4}$，

又事件 A,C 相互独立，事件 B,C 相互独立，

所以 $\begin{cases}(1-P(A))(1-P(C))=\frac{1}{12},\\ P(B)\cdot P(C)=\frac{1}{4},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}P(B)=\frac{3}{8},\\ P(C)=\frac{2}{3},\end{cases}$ 即乙家庭猜对的概率

为$\frac{3}{8}$,丙家庭猜对的概率为$\frac{2}{3}$.

(2)记甲、乙、丙三个家庭中不少于两个家庭猜对此灯谜为事件 D,则 $P(D)=P(ABC+\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C})=P(ABC)+P(\overline{A}BC)+P(A\overline{B}C)+P(AB\overline{C})=\frac{3}{4}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{5}{8}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{3}{8}\times\frac{1}{3}=\frac{21}{32}$.

能力上分

1. C 【解析】因为 A,B 相互独立,所以 $P(AB)=P(A)P(B)$,

又因为 $P(A)=0.4$,$P(AB)=0.2$,所以 $P(B)=0.5$,

而 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.4+0.5-0.2=0.7$,**故选 C.**

2. BC 【解析】记事件 A_1="从甲袋中任取 1 个球为红球",事件 A_2="从乙袋中任取 1 个球为红球",则 $P(A_1)=\frac{2}{3}$,$P(A_2)=\frac{1}{2}$.

对于 A,即求事件 A_1A_2 的概率,$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=\frac{1}{3}$,**故 A 错误;**

对于 B,即求事件 $A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2$ 的概率,$P(A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2)=P(A_1)P(\overline{A_2})+P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,**故 B 正确;**

对于 C,由于"都是红球"与"不都是红球"互为对立事件,所以所求概率为 $1-P(A_1A_2)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$,**故 C 正确;**

对于 D,即求事件 $\overline{A_1}\,\overline{A_2}$ 的概率,$P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}$,**故 D 错误.**

归纳总结 求相互独立事件概率的方法

(1)对于简单问题,一般将题中所求事件转化为若干个相互独立事件的交事件,利用相互独立事件的性质求解;

(2)对于复杂问题,一般将问题划分为若干个彼此互斥的事件,然后运用互斥事件的概率加法公式、相互独立事件的概率公式计算,有时还会利用对立事件的概率公式进行求解.

3. $\frac{1}{12}$ 【解析】设甲、乙、丙、丁猜对的概率依次为 x,y,z,a,依据独立事件的性质,

可得$\begin{cases}x(1-y)=\frac{1}{3},\\ y(1-z)=\frac{1}{4},\\ z(1-a)=\frac{1}{8},\\ xa=\frac{1}{4},\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\ x=\frac{1}{2},\\ y=\frac{1}{3},\\ z=\frac{1}{4},\end{cases}$

所以乙、丙都猜对的概率为 $yz=\frac{1}{12}$.

4. $\frac{1}{2}$ 【解析】记事件 A = "取出的球是白球",事件 A_1 = "取甲箱并取白球",事件 A_2 = "取乙箱并取白球",由题意可知,事件 A 是事件 A_1,A_2 的和,显然事件 A_1 与 A_2 互斥,$P(A_1)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$,$P(A_2)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{6}=\frac{1}{3}$,所以 $P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{1}{2}$.

5. 13 【解析】由题意可知$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$,所以$P(ABC)=\frac{1}{8}$,可见 1 是 A,B,C 唯一的共同样本点,则 m,n 不为 2,3,又因为 A,B,C 两两不独立,即 $P(AB)\neq\frac{1}{4}$,$P(AC)\neq\frac{1}{4}$,$P(BC)\neq\frac{1}{4}$,可见 m,n 不为 4,5,所以 m 为 6,n 为 7 或 m 为 7,n 为 6,则 $m+n=13$.

6. 思路导引　(1)写出所有的样本点,再根据古典概率公式即可得出答案;(2)利用独立性事件同时发生的乘法公式及互斥事件发生的加法公式计算 $P(A),P(B),P(AB)$,再验证 $P(AB)$ 与 $P(A)P(B)$ 是否相等即可判断.

【解】(1)记 3 个红球分别为 A_1,A_2,A_3,2 个白球分别为 B_1,B_2,蓝球为 C,

则 6 个球中一次性随机摸出 2 个球的样本空间 $\Omega=\{A_1A_2,A_1A_3,A_1B_1,A_1B_2,A_1C,A_2A_3,A_2B_1,A_2B_2,A_2C,A_3B_1,A_3B_2,A_3C,B_1B_2,B_1C,B_2C\}$,

则 $n(\Omega)=15$,且每个样本点出现的可能性相等,所以这是一个古典概型.

记事件 $D=$"甲获得一等奖",则 $D=\{A_1A_2,A_1A_3,A_2A_3\}$,$n(D)=3$,

所以 $P(D)=\dfrac{n(D)}{n(\Omega)}=\dfrac{1}{5}$,所以甲获得一等奖的概率为$\dfrac{1}{5}$.

(2)记事件 $E_i=$"乙第 i 次摸得 2 个红球",事件 $F_i=$"乙第 i 次摸得 1 红 1 蓝 2 个球",

事件 $G_i=$"乙第 i 次摸得 1 白 1 蓝 2 个球",事件 $H_i=$"乙第 i 次未摸到蓝球",其中 $i=1,2$.

由(1)知 $P(E_1)=P(E_2)=\dfrac{1}{5}$;

$F_1=F_2=\{A_1C,A_2C,A_3C\}$,$P(F_1)=P(F_2)=\dfrac{1}{5}$;

$G_1=G_2=\{B_1C,B_2C\}$,$P(G_1)=P(G_2)=\dfrac{2}{15}$;

$H_1=H_2=\{A_1A_2,A_1A_3,A_1B_1,A_1B_2,A_2A_3,A_2B_1,A_2B_2,A_3B_1,A_3B_2,B_1B_2\}$,$P(H_1)=P(H_2)=\dfrac{10}{15}=\dfrac{2}{3}$.

事件 $A=E_1\overline{E_2}\cup\overline{E_1}E_2\cup E_1E_2$,$\overline{A}=\overline{E_1}\ \overline{E_2}$,$\overline{E_1}$ 与 $\overline{E_2}$ 相互独立,

所以 $P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{E_1}\ \overline{E_2})=1-\left(1-\dfrac{1}{5}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{9}{25}$.

因为 $B=F_1H_2\cup H_1F_2\cup G_1G_2$，且事件 F_1H_2,H_1F_2,G_1G_2 两两互斥，两次抽奖相互独立，

所以 $P(B)=P(F_1H_2\cup H_1F_2\cup G_1G_2)=P(F_1H_2)+P(H_1F_2)+P(G_1G_2)=\frac{1}{5}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}+\frac{2}{15}\times\frac{2}{15}=\frac{64}{225}$.

因为 $AB=E_1F_2\cup F_1E_2$，且 E_1F_2,F_1E_2 互斥，两次抽奖相互独立，

所以 $P(AB)=P(E_1F_2\cup F_1E_2)=P(E_1F_2)+P(F_1E_2)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{25}$.

所以 $P(AB)\neq P(A)P(B)$，所以事件 A 与事件 B 不相互独立.

10.3　频率与概率

10.3.1　频率的稳定性+

10.3.2　随机模拟

对点上分

1. D　【解析】对于 A，$\frac{7}{10}$是中靶的频率，不是概率，故错误；

对于 B，掷 6 次硬币可能会有 3 次正面向上，而不是一定有 3 次正面向上，说法太绝对，故错误；

对于 C，回报率为 47% 只是表示一种概率，花 100 元买彩票，不一定会有 47 元的回报，题干说法太绝对，故错误；

对于 D，符合概率的估算方法，故正确.

2. ABC　【解析】对于 A，从中任取 100 件，可能有 10 件次品，而不是必有 10 件次品，说法太绝对，故错误；

对于 B，即使事件 B“抛掷 10 枚硬币，均为正面朝上”没有发生，也不能说明 $P(B)=0$，故错误；

对于 C，多次重复试验中事件发生的频率会稳定在某一常数附近，此常数即为该事件发生的概率，与题干描述不符，故错误；

对于 D，10 000 次的界定没有科学依据，

“不一定很准确”的表达正确，试验次数越多，频率越稳定在概率附近，但并非试验次数足够多，频率就等于概率，故正确.

易错警示 对频率与概率的关系辨析不清致误

概率定义中用频率的稳定值估计概率，要求试验次数足够多，即只有在相同条件下，随着试验次数的增加，随机事件发生的频率在某个常数附近摆动并趋于稳定时才用这个常数来估计该随机事件发生的可能性的大小，即该随机事件发生的概率.

3. B 【解析】对于 A，70% 为降水的概率，即有 70% 的可能性会降水，不是有 70% 的时间降水，故错误；

对于 B，明天郊区的降水概率比较大，为 70%，故正确；

对于 C，不管郊区还是中心城区明天都可能会出现降水，故错误；

对于 D，降水量并不取决于降水概率，故根据题干信息无法比较郊区与中心城区的降水量，故错误.

易错警示 不理解概率的意义致错

降水概率为 30% 或 70%，是指降水的可能性为 30% 或 70%，即可能降水也可能不降水，不是有 30% 或 70% 的地区降水，也不是说降水量是 30% 或 70%.

4. D 【解析】在随机抽取的 100 名顾客中，顾客年龄在$[40,60)$内且未使用手机支付的共有 $9+5=14$(人)，所以估计该顾客年龄在$[40,60)$内且未使用手机支付的概率 $P=\frac{14}{100}=\frac{7}{50}$. 故选 D.

5. D 【解析】若四面体是均匀的，理论上每个面落地的次数仍旧可能不一样，在四面体是均匀的条件下，随着试验次数的增多，每个面落地的次数将会变得越来越接近，换句话说，即使是均匀的四面体，仅仅在 200 次试验下，得到各个面落

地的次数的统计结果也可能不一样，**故 A 错误**；

这 200 次试验中标记 2，3，4 的面落在地面的频率分别为 $\frac{36}{200}$，$\frac{42}{200}$，$\frac{78}{200}$，即 0.18，0.21，0.39，B 选项中所估计的标记 2 的面落地的概率 0.72 和频率 0.18 差别过大，C 选项认为标记 4 的面必定落地，是必然事件，概率为 1，但其频率只有 0.39，因此不能认为该事件必然发生，**故 B，C 错误**；

D 选项，估计标记 3 的面落地的概率是 0.2，和试验频率 0.21 非常接近，**故 D 正确**.

6. B 【解析】设该校有 a 名同学，由题意得，约有 $0.4a$ 名学生近视，约有 $0.3a$ 名学生每天玩手机的时间超过 2 h，约有 $0.7a$ 名学生每天玩手机的时间不超过 2 h.

因为该校大约有 30% 的学生每天玩手机的时间超过 2 h，这些人的近视率约为 50%，所以每天玩手机的时间超过 2 h 的学生中近视的人数约为 $0.3a\times0.5=0.15a$，则每天玩手机的时间不超过 2 h 的学生中近视的人数约为 $0.4a-0.15a=0.25a$，所以从每天玩手机的时间不超过 2 h 的学生中任意调查一名学生，该名学生近视的概率约为 $\frac{0.25a}{0.7a}=\frac{5}{14}$. **故选 B.**

7. 0.90 【解析】标准乒乓球的直径是 40.00 mm，若误差不超过 0.03 mm，则直径需落在[39.97，40.03]范围内. 由频率分布表知，所求频率为 $0.20+0.50+0.20=0.90$，所以这批乒乓球的直径误差不超过 0.03 mm 的概率约为 0.90.

8.【解】(1) 由频率分布直方图可知，旧养殖法的箱产量低于 50 kg 的频率为 $(0.012+0.014+0.024+0.034+0.040)\times5=0.62$，由频率估计概率，所以估计事件 A 的概率为 0.62.

(2) 由频率分布直方图可得，旧养殖法 100 个网箱的箱产量的平均数 $\overline{x_1}=(27.5\times0.012+32.5\times0.014+37.5\times0.024+42.5\times0.034+47.5\times0.040+52.5\times$

$0.032+57.5\times0.020+62.5\times0.012+67.5\times0.012)\times5=9.42\times5=47.1$,

新养殖法 100 个网箱的箱产量的平均数 $\overline{x_2}=(37.5\times0.004+42.5\times0.020+47.5\times0.044+52.5\times0.068+57.5\times0.046+62.5\times0.010+67.5\times0.008)\times5=10.47\times5=52.35$,

因为 $\overline{x_1}<\overline{x_2}$,所以新养殖法优于旧养殖法.

9. D 【解析】$\because$ 射击 4 次至多击中 2 次对应的随机数组为 7140,1417,0371,6011,7610,共 5 组,$\therefore$ 射击 4 次,至少击中 3 次的概率为 $1-\frac{5}{20}=0.75$. **故选** D.

10. A 【解析】由题意可知,随机模拟试验产生的 20 组随机数中,代表"3 次中至少 2 次投中 8 环以上"的数组共 18 组,因此,该选手投掷一轮,可以拿到优秀的概率为 $\frac{18}{20}=\frac{9}{10}$. **故选** A.

11. $\frac{3}{4}$ 【解析】由题意,三只豚鼠中至少有一只被感染的对立事件为三只豚鼠都没有被感染,

随机数中满足三只豚鼠都没有被感染的有 907,966,569,556,989,共 5 组,

故三只豚鼠都没有被感染的概率为 $\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$,则三只豚鼠中至少有一只被感染的概率为 $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

10.2~10.3 节测上分

1. D 【解析】以 x,y 分别表示第一次、第二次摸出的球的标号,以 (x,y) 表示这个试验的一个样本点. 摸球方式为不放回摸球,则有 $(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)$,共 12 个样本点,

事件 A 包含的样本点有 $(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4)$,共 6 个;

事件 B 包含的样本点有 $(1,2),(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)$,共 6 个;

事件 AB 包含的样本点有 $(1,2),(2,1)$,

共 2 个；

事件 C 包含的样本点有 $(1,2),(1,3),(1,4),(3,1),(3,2),(3,4)$，共 6 个；

事件 AC 包含的样本点有 $(1,2),(1,3),(1,4)$，共 3 个. 则 $A\cap B\neq\varnothing$，根据互斥事件的概念可知 A 与 B 不互斥，**故 A 错误**；

$P(A)=P(B)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$，$P(AB)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}\neq P(A)P(B)$，所以 A 与 B 不相互独立，**故 B 错误**；

$A\cap C\neq\varnothing$，根据互斥事件的概念可知 A 与 C 不互斥，**故 C 错误**；

$P(A)=P(C)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$，$P(AC)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}=P(A)P(C)$，所以 A 与 C 相互独立，**故 D 正确.**

2. BCD 【解析】若 A,B 相互独立，则 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$，若 A,B 互斥，则 $P(A\cap B)=0$，而 $P(A)>0,P(B)>0$，所以事件 A,B 相互独立与 A,B 互斥不可能同时成立，**故 A 错误.**

当事件 A,B,C 两两独立时，$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$ 一般不成立.

比如：设样本空间 $\Omega=\{a,b,c,d\}$，各个样本点出现的可能性相等，且 $A=\{a,b\}$，$B=\{a,c\}$，$C=\{a,d\}$，则 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$，$P(AB)=P(AC)=P(BC)=\frac{1}{4}$，所以 $P(AB)=P(A)P(B)$，$P(AC)=P(A)P(C)$，$P(BC)=P(B)P(C)$，即三个事件 A,B,C 两两独立，但是 $P(ABC)=\frac{1}{4}\neq P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{8}$，**故 B 正确.**

若 A,B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B 也都相互独立，**故 C 正确.**

由 $P(\overline{A})=\frac{1}{3}$ 得 $P(A)=\frac{2}{3}$，所以 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{4}$，**故 D 正确.**

3. D 【解析】根据统计图可知，试验结果

在 0.33 附近波动，即估计其概率 $P=\frac{1}{3}$，掷一枚硬币，出现正面朝上的概率为 $\frac{1}{2}$，**故 A 不符合题意；**

掷一枚正六面体的骰子，出现 1 点的概率为 $\frac{1}{6}$，**故 B 不符合题意；**

转动如题图②所示的转盘，转到数字为奇数的概率为 $\frac{2}{3}$，**故 C 不符合题意；**

从装有 2 个红球和 1 个蓝球的口袋中任取 1 个球，恰好是蓝球的概率为 $\frac{1}{3}$，**故 D 符合题意.**

4. C 【**解析**】记小刚答对 A,B,C 三道题分别为事件 D,E,F，且 D,E,F 相互独立，则 $P(D)=P(E)=a$，$P(F)=\frac{1}{2}$，则小刚恰好能答对两道题为事件 $(DE\overline{F}+D\overline{E}F+\overline{D}EF)$，且 $DE\overline{F}$，$D\overline{E}F$，$\overline{D}EF$ 两两互斥，所以 $P(DE\overline{F}+D\overline{E}F+\overline{D}EF)=P(DE\overline{F})+P(D\overline{E}F)+P(\overline{D}EF)=P(D)P(E)P(\overline{F})+P(D)P(\overline{E})P(F)+P(\overline{D})P(E)P(F)=a\times a\times\left(1-\frac{1}{2}\right)+a\times(1-a)\times\frac{1}{2}+(1-a)\times a\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，整理得 $(1-a)^2=\frac{1}{2}$.

小刚三道题都答错为事件 $\overline{D}\,\overline{E}\,\overline{F}$，

则 $P(\overline{D}\,\overline{E}\,\overline{F})=P(\overline{D})P(\overline{E})P(\overline{F})=(1-a)^2\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(1-a)^2=\frac{1}{4}$. **故选 C.**

5. 300 【**解析**】由表中数据知，最高气温低于 25 ℃的频率为 $\frac{4+5}{90}=0.1$，且由题意可知，最高气温低于 25 ℃时，这种冷饮一天的需求量不超过 300 瓶，所以 6 月份这种冷饮一天的需求量不超过 300 瓶的概率的估计值为 0.1，即 $x=300$.

6. $\frac{2}{5}$ 【**解析**】10 组随机数中，表示三天中恰有两天下雨的有 417，386，196，206，故这三天中恰有两天下雨的概率为 $\frac{4}{10}=$

$\frac{2}{5}$.

7. $\frac{7}{48}$ 【解析】①10∶10 平后，四球胜方依次是甲、乙、甲、甲，则概率为$\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{8}$；

②10∶10 平后，四球胜方依次是乙、甲、甲、甲，则概率为$\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{48}$.

由互斥事件的概率加法公式，可知所求事件的概率为$\frac{1}{8}+\frac{1}{48}=\frac{7}{48}$.

专题上分 8 概率与其他知识的综合

1. ABD 【解析】对于 A，72÷15% = 480，故参加社团的同学的总人数为 480，故正确；

对于 B，参加脱口秀社团的有 120 人，故参加脱口秀社团的人数占五个社团总人数的$\frac{120}{480}$=25%，故正确；

对于 C，参加朗诵社团的人数为 480×35% = 168，参加舞蹈社团的人数占比为 1−15%−15%−25%−35% = 10%，故参加舞蹈社团的人数为 480×10% = 48，则参加朗诵社团的人数比参加舞蹈社团的人数多 168−48 = 120，故错误；

对于 D，从所有参加社团的同学中任选一名，其参加舞蹈或者脱口秀社团的概率为 25%+10% = 35%，即 0. 35，故正确.

2. D 【解析】由频率分布直方图得，学生物理成绩在[70，80)的频率最高，所以估计成绩的众数为 75，**故 A 正确**；

因为 0. 010×10+0. 015×10+0. 020×10+0. 030×10 = 0. 75，所以估计学生物理成绩的第 75 百分位数为 80，**故 B 正确**；

因为成绩在[90，100]内的人数为 100×0. 010×10 = 10，所以随机抽取 1 名学生进行访谈，若甲在其中，则甲被抽取的概率为$\frac{1}{10}$=0. 1，**故 C 正确**；

记从[40，50)内抽取的 1 名学生为 a，

从$[90,100]$内抽取的 1 名学生为 b，从$[70,80)$内抽取的 2 名学生为 c,d，则从这 4 人中任意抽取 2 人，所有的可能结果为 ab,ac,ad,bc,bd,cd，共 6 种，其中这 2 人来自不同组的有 ab,ac,ad,bc,bd，共 5 种，所以这 2 人来自不同组的概率为$\frac{5}{6}$，故 D 错误.

3.【解】(1)这名运动员 10 次射击成绩的平均数 $\bar{x}=\frac{1}{10}\times(8+7+9+9+10+6+8+8+7+8)=8$，

方差 $s^2=\frac{1}{10}\times[(6-8)^2+2\times(7-8)^2+4\times(8-8)^2+2\times(9-8)^2+(10-8)^2]=1.2$.

(2)设该运动员射击一次时，A="命中 7 环"，B="命中 8 环"，C="命中 9 环"，D="命中 10 环"，用频率估计概率，则 $P(A)=\frac{1}{5}$，$P(B)=\frac{2}{5}$，$P(C)=\frac{1}{5}$，$P(D)=\frac{1}{10}$.

①设 E="命中 9 环或者 10 环"，则 $P(E)=P(C\cup D)=P(C)+P(D)=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$；

②设 F="至少命中 7 环"，则 $P(F)=P(A\cup B\cup C\cup D)=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$.

一题多解 ②设 F="至少命中 7 环"，G="命中不超过 6 环"，则 $P(G)=\frac{1}{10}$，所以 $P(F)=1-P(G)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$.

4.【解】(1)根据频率分布直方图可得 $(0.005+x+0.035+0.030+0.010)\times10=1$，解得 $x=0.020$.

(2)因为 $(0.005+0.020)\times10=0.25<0.5$，$0.25+0.035\times10=0.6>0.5$，所以中位数在$[70,80)$内，

设中位数为 m，则有 $0.25+(m-70)\times0.035=0.5$，解得 $m=\frac{540}{7}$.

平均数为 $55\times0.05+65\times0.20+75\times0.35+85\times0.30+95\times0.10=77$.

(3)依题意,因为满意度评分值在$[80,90)$内的男生人数与女生人数的比为$3:2$,

按照按比例分配的分层随机抽样的方法在其中随机抽取 5 人,则抽中男生 3 人,女生 2 人,依次分别记为 A_1,A_2,A_3,B_1,B_2,

对这 5 人依次进行访谈,前 2 人的样本点为 $A_1A_2,A_1A_3,A_1B_1,A_1B_2,A_2A_3,A_2B_1,A_2B_2,A_3B_1,A_3B_2,B_1B_2$,共 10 个,

设"前 2 人均为男生"为事件 A,其包含的样本点为 A_1A_2,A_1A_3,A_2A_3,共 3 个,所以 $P(A)=\dfrac{3}{10}$.

5. $\dfrac{5}{8}$

思路导引 根据题意,利用基本不等式,求得 $f(x)_{\min}=(2\sqrt{a}+1)^2$,不等式转化为$(2\sqrt{a}+1)^2>b$ 恒成立,结合 a 是从 1,2,3,4 四个数中任取一个,b 是从 4,8,12,16,20,24 六个数中任取一个,得到样本点总数有 24 个,再利用穷举法,求得 $f(x)>b$ 成立的样本点的个数,结合古典概型的概率计算公式,即可求解.

【解析】$a>0$,由 $x>4$,可得 $x-4>0$,则 $f(x)=ax+\dfrac{x}{x-4}=ax+1+\dfrac{4}{x-4}=a(x-4)+\dfrac{4}{x-4}+4a+1\geqslant4\sqrt{a}+4a+1=(2\sqrt{a}+1)^2$,当且仅当 $x=\sqrt{\dfrac{4}{a}}+4$ 时,等号成立,故 $f(x)_{\min}=(2\sqrt{a}+1)^2$.

由不等式 $f(x)>b$ 恒成立,转化为$(2\sqrt{a}+1)^2>b$ 恒成立.

因为 a 是从 1,2,3,4 四个数中任取一个,b 是从 4,8,12,16,20,24 六个数中任取一个,则构成(a,b)的样本点总数有 24 个.

又由$(2\sqrt{1}+1)^2=9$,$(2\sqrt{2}+1)^2=9+4\sqrt{2}\in(14,16)$,$(2\sqrt{3}+1)^2=13+4\sqrt{3}\in(19,$

20),$(2\sqrt{4}+1)^2=25$,

设事件 A=“不等式 $f(x)>b$ 恒成立”,则事件 A 包含样本点(1,4),(1,8),(2,4),(2,8),(2,12),(3,4),(3,8),(3,12),(3,16),(4,4),(4,8),(4,12),(4,16),(4,20),(4,24),共 15 个,

因此不等式 $f(x)>b$ 恒成立的概率为 $\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$.

6.【解】用 B 表示事件“小王赢”,则 $\overline{B}$ 表示事件“小李赢”.

设 $f(x)=ax^2+2bx-1$,由题意知 $a>0$,$f(0)=-1$,

所以方程 $f(x)=0$ 在区间 $(-\infty,-3)$ 上有实数根等价于 $f(-3)<0$,即 $9a-6b-1<0$,

所以 $B=\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,5),(3,6),(4,6)\}$,所以 $n(B)=12$,

则 $P(B)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$,$P(\overline{B})=1-P(B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$,

故小王赢的概率小于小李赢的概率,所以这个游戏规则不公平.

7.【解】当 $m\in[155,160]$ 时,$f(m)=p(m)+q(m)=(m-155)\times0.008+(160-m)\times0.012+0.008\times5=0.72-0.004m$;

当 $m\in(160,165]$ 时,$f(m)=p(m)+q(m)=0.008\times5+(m-160)\times0.016+(165-m)\times0.008=0.008m-1.2$.

综上,$f(m)=\begin{cases}0.72-0.004m, m\in[155,160],\\ 0.008m-1.2, m\in(160,165].\end{cases}$

可知 $f(m)$ 在 $[155,160]$ 上单调递减,在 $(160,165]$ 上单调递增,所以当 $m=160$ 时,有 $f(m)_{\min}=0.08$.

故在实际中,以 $f(m)$ 取得最小值时的临界值 $m=160$ 为标准,可以使漏诊率与误诊率的和最小,是检测效果最好的临界值.

真题上分

1.【解】(1)估计该地区这种疾病患者的平

均年龄为 $0.001\times10\times5+0.002\times10\times15+0.012\times10\times25+0.017\times10\times35+0.023\times10\times45+0.020\times10\times55+0.017\times10\times65+0.006\times10\times75+0.002\times10\times85=47.9$(岁).

(2)估计该地区一位这种疾病患者的年龄位于区间[20,70)的概率 $P=0.012\times10+0.017\times10+0.023\times10+0.020\times10+0.017\times10=0.89$.

2.【解】(1)由试加工产品等级的频数分布表知,甲分厂加工出来的一件产品为 A 级品的概率的估计值为 $\frac{40}{100}=0.4$;

乙分厂加工出来的一件产品为 A 级品的概率的估计值为 $\frac{28}{100}=0.28$.

(2)由数据知甲分厂加工出来的 100 件产品利润的频数分布表为

利润	65	25	−5	−75
频数	40	20	20	20

因此甲分厂加工出来的 100 件产品的平均利润为 $\frac{65\times40+25\times20-5\times20-75\times20}{100}=15$.

由数据知乙分厂加工出来的 100 件产品利润的频数分布表为

利润	70	30	0	−70
频数	28	17	34	21

因此乙分厂加工出来的 100 件产品的平均利润为 $\frac{70\times28+30\times17+0\times34-70\times21}{100}=10$.

比较甲、乙两分厂加工的产品的平均利润,应选甲分厂承接加工业务.

3.【解】(1)估计该校男生支持方案一的概率 $P_1=\frac{200}{200+400}=\frac{1}{3}$,

该校女生支持方案一的概率 $P_2=\frac{300}{300+100}=\frac{3}{4}$.

(2)从该校全体男生中随机抽取 2 人,全体女生中随机抽取 1 人,这 3 人中恰有 2 人支持方案一有两种情况:

①2 名男生都支持方案一,女生不支持,

估计概率为$\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{36}$；

②2 名男生中只有 1 名男生支持方案一，女生支持方案一，估计概率为$\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{3}{4}+\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{3}$.

则估计这 3 人中恰有 2 人支持方案一的概率 $P=\frac{1}{36}+\frac{1}{3}=\frac{13}{36}$.

(3) $p_0>p_1$.

理由：估计该校学生男生、女生人数的整体比例为 600∶400 = 3∶2，男生对方案二的支持率高于女生. 而一年级男生、女生人数的比例为 500∶300 = 5∶3，高于整体比值，一年级对方案二的支持率高于平均值，所以除一年级外其他年级学生支持方案二的概率估计值 p_1 小于该校学生支持方案二的概率估计值 p_0.

4. D 【解析】依题意，用 A_1,A_2 表示高一的 2 名学生，B_1,B_2 表示高二的 2 名学生，则从 4 名学生中随机选 2 名学生的选法有 (A_1,A_2)，(B_1,B_2)，(A_1,B_1)，(A_1,B_2)，(A_2,B_1)，(A_2,B_2)，共 6 种，其中 2 名学生来自不同年级的选法有 (A_1,B_1)，(A_1,B_2)，(A_2,B_1)，(A_2,B_2)，共 4 种，所以所求概率 $P=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，**故选** D.

5. A 【解析】甲、乙两位参赛同学抽取主题的结果共有 6×6 = 36(种)，抽到相同主题的结果共有 6 种，所以甲、乙两位参赛同学抽到相同主题的概率为$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$，则甲、乙两位参赛同学抽到不同主题的概率为 $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$，**故选** A.

6. D 【解析】从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数，共有 7×6÷2 = 21(种)不同的结果，这 2 个数互质的情况有{2，3}，{2，5}，{2，7}，{3，4}，{3，5}，{3，7}，{3，8}，{4，5}，{4，7}，{5，6}，{5，7}，{5，8}，{6，7}，{7，8}，共 14 种. 所以

这 2 个数互质的概率 $P=\frac{14}{21}=\frac{2}{3}$. 故选 D.

7. $\frac{1}{2}$　【解析】穷举法:假设乙固定按照 2,4,6,8 的顺序,则甲所有的可能如表所示.

1	3	5	7√	5	1	3	7√
1	3	7	5√	5	1	7	3
1	5	3	7√	5	3	1	7√
1	5	7	3	5	3	7	1
1	7	3	5√	5	7	1	3
1	7	5	3√	5	7	3	1
3	1	5	7√	7	1	3	5√
3	1	7	5	7	1	5	3√
3	5	1	7	7	3	1	5√
3	5	7	1	7	3	5	1√
3	7	1	5	7	5	1	3
3	7	5	1	7	5	3	1

从中找均小于 2,4,6,8 与有 3 个数字分别小于 2,4,6,8 的情况,此时甲得 0 分或 1 分,符合上述情况的有表中打√的 12 种情况.

那么甲的总得分不小于 2 分也有 12 种情况,由古典概型概率公式得所求概率为$\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$.

说明:固定乙的顺序,将甲的情况排列出来,去挑选,也可以从中判断甲有 2 个及以上的数字超过乙的.如果改变乙的顺序,其情况是类似的

8. ABD

思路导引　对于 A 与 B,根据相互独立事件的概率公式求解;

对于 C,分两种情况讨论 $\begin{cases}\text{发送 1,依次收到 1,1,1,}\\\text{发送 1,恰好收到两次 1,一次 0;}\end{cases}$

对于 D,分别算出采用三次传输方案译码为 0 的概率以及单次传输方案译码为 0 的概率→将两个概率作差→设函数 $f(\alpha)$→根据 $0<\alpha<0.5$ 判断 $f(\alpha)$ 的符号→结论.

【解析】对于 A 选项,采用单次传输方案,依次发送 1,0,1,依次收到 1,0,1 的概率为$(1-\beta)(1-\alpha)(1-\beta)=(1-\alpha)(1-\beta)^2$,

所以 A 选项正确.

对于 B 选项,采用三次传输方案,发送 1,依次收到 1,0,1 的概率为 $(1-\beta)\beta(1-\beta)=\beta(1-\beta)^2$,所以 B 选项正确.

对于 C 选项,采用三次传输方案,发送 1,依次收到 1,1,1(即译码为 1)的概率为 $(1-\beta)(1-\beta)(1-\beta)=(1-\beta)^3$;发送 1,依次收到 1,0,1(即译码为 1),0,1,1(即译码为 1),1,1,0(即译码为 1)的概率为 $3(1-\beta)\beta(1-\beta)=3(1-\beta)^2\beta$,于是译码为 1 的概率为 $(1-\beta)^3+3(1-\beta)^2\beta$,所以 C 选项不正确.

对于 D 选项,采用三次传输方案,发送 0,依次收到 0,0,0(即译码为 0)的概率为 $(1-\alpha)(1-\alpha)(1-\alpha)=(1-\alpha)^3$;发送 0,依次收到 0,0,1(即译码为 0),0,1,0(即译码为 0),1,0,0(即译码为 0)的概率为 $3(1-\alpha)\alpha(1-\alpha)=3(1-\alpha)^2\alpha$,于是译码为 0 的概率为 $(1-\alpha)^3+3(1-\alpha)^2\alpha$. 采用单次传输方案,发送 0,译码为 0 的概率为 $1-\alpha$. 依题意,有 $(1-\alpha)^3+3(1-\alpha)^2\alpha>1-\alpha$,$\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$,即 $-2\alpha^2+\alpha>0$,$\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

令函数 $f(\alpha)=-2\alpha^2+\alpha$,$\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$,则 $f(\alpha)=\alpha(1-2\alpha)>0$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上恒成立,

所以 D 选项正确. 故选 ABD.

9. D 【解析】设该棋手在第二盘与甲比赛连胜两盘的概率为 $p_{甲}$,第二盘与乙比赛连胜两盘的概率为 $p_{乙}$,第二盘与丙比赛连胜两盘的概率为 $p_{丙}$,则 $p_{甲}=p_1p_2(1-p_3)+p_1p_3(1-p_2)=p_1p_2+p_1p_3-2p_1p_2p_3$,$p_{乙}=p_1p_2(1-p_3)+p_2p_3(1-p_1)=p_1p_2+p_2p_3-2p_1p_2p_3$,$p_{丙}=p_1p_3(1-p_2)+p_2p_3(1-p_1)=p_1p_3+p_2p_3-2p_1p_2p_3$,所以 $p_{丙}-p_{甲}=p_2(p_3-p_1)>0$,$p_{丙}-p_{乙}=p_1(p_3-p_2)>0$,

提示:将 $p_{丙}$ 与 $p_{甲}$,$p_{乙}$ 分别相减,运用因式分解求出差的符号

所以 $p_{丙}$ 最大,故选 D.

一题多解 设 $p_1=0.3, p_2=0.4, p_3=0.5$，则该棋手在第二盘分别与甲、乙、丙比赛时，$p$ 的值分别为 0.15，0.2，0.23，可直接排除选项 B 和 C，且 p 的值与该棋手和甲、乙、丙的比赛次序有关，进而排除选项 A，**故选** D.

10. B 【解析】由题意可知，甲表示事件"第一次取出的球的数字是 1"，记为 $(1,i)$，$i=1,2,\cdots,6$；乙表示事件"第二次取出的球的数字是 2"，记为 $(j,2)$，$j=1,2,\cdots,6$；丙表示事件"两次取出的球的数字之和是 8"，记为 (m,n)，$m,n=1,2,\cdots,6$，

提示：注意是"有放回"

且 $m+n=8$；丁表示事件"两次取出的球的数字之和是 7"，记为 (p,q)，$p,q=1,2,\cdots,6$，且 $p+q=7$. 则 $P(甲)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$，$P(乙)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$，$P(丙)=\frac{5}{36}$，$P(丁)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$，$P(甲丙)=0$，$P(甲丁)=\frac{1}{36}$，$P(乙丙)=\frac{1}{36}$，$P(丙丁)=0$，故 $P(甲丁)=P(甲)P(丁)$，**故选** B.

提示：若事件 A,B 满足 $P(AB)=P(A)P(B)$，则事件 A,B 相互独立

11. $\frac{1}{20}$　$\frac{3}{5}$ 【解析】由题意知从三个箱子中摸到黑球的概率分别为 $\frac{2}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{2}$，因为从三个箱子中摸球相互独立，所以摸出的球均为黑球的概率为 $\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{20}$. 三个箱子中小球的数量占总数的比例分别为 $\frac{1}{3},\frac{4}{15},\frac{2}{5}$，所以白球占比为 $\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{2}{5}\right)+\frac{4}{15}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{5}$，则摸出一个白球的概率为 $\frac{3}{5}$.

12. 【解】(1) 甲连胜四场的概率为 $\frac{1}{16}$.

(2) 根据赛制，至少需要进行四场比赛，至多需要进行五场比赛.

比赛四场结束,共有三种情况:

甲连胜四场的概率为$\frac{1}{16}$;

乙连胜四场的概率为$\frac{1}{16}$;

丙上场后连胜三场的概率为$\frac{1}{8}$.

所以需要进行第五场比赛的概率为 $1-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}-\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$.

关键点拨 丙上场后连胜三场情形如下:

	比赛双方		获胜
第一场	甲	乙	甲(或乙)
第二场	甲(或乙)	丙	丙
第三场	丙	乙(或甲)	丙
第四场	甲(或乙)	丙	丙

所以丙上场后,连胜三场的概率为 $\frac{1}{16}\times2=\frac{1}{8}$.

(3)丙最终获胜,有两种情况:

比赛四场结束且丙最终获胜的概率为$\frac{1}{8}$;

比赛五场结束且丙最终获胜,则从第二场开始的四场比赛按照丙的胜、负、轮空结果有三种情况:胜胜负胜,胜负空胜,负空胜胜,概率分别为$\frac{1}{16}$,$\frac{1}{8}$,$\frac{1}{8}$.

因此丙最终获胜的概率为$\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{7}{16}$.

素养上分

1. B 【解析】根据题意可知一共 6 根算筹,十位和个位上可用的算筹可以分为 5+1,4+2,3+3,2+4,1+5,一共五类情况.

第一类:5+1,即十位用 5 根算筹,个位用 1 根算筹,十位可能是 5 或 9,个位为 1,故表示的两位数可能是 51,91;

第二类:4+2,即十位用 4 根算筹,个位用 2 根算筹,十位可能是 4 或 8,个位可能是 2 或 6,故表示的两位数可能是 42,46,82,86;

第三类:3+3,即十位用 3 根算筹,个位用 3 根算筹,十位可能是 3 或 7,个位可能是 3 或 7,故表示的两位数可能是 33,37,73,77;

第四类:2+4,即十位用 2 根算筹,个位用 4 根算筹,十位可能是 2 或 6,个位可能是 4 或 8,故表示的两位数可能是 24,28,64,68;

第五类:1+5,即十位用 1 根算筹,个位用 5 根算筹,十位是 1,个位可能是 5 或 9,故表示的两位数可能是 15,19.

综上,用 6 根算筹组成的满足题意的所有的两位数为 15,19,24,28,33,37,42,46,51,64,68,73,77,82,86,91,共计 16 个,不小于 50 的为 51,64,68,73,77,82,86,91,共计 8 个,

故所求概率为$\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$.

2. B 【解析】设正方体棱长为 1,则正方体体对角线的长为$\sqrt{3}$,则正方体的外接球的半径 $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$,正方体体积 $V_{正}=1$,所以“牟合方盖”的体积 $V_1=\frac{2}{3}$,外接球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$,

所以在该正方体的外接球内任取一点,此点取自“牟合方盖”内的概率 $P=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{3}\pi}{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{9\pi}$.

3. 【解】(1)因为每档只拨动一粒珠子至梁上,因此每档表示的数字只能是 1 或 5,

故三位数的个数为 $2^3=8$,

要使得组成的三位数能被 5 整除,则只需个位数是 5 即可,

而这些数中个位数是 5 的数的个数为 $2^2=4$,

所以事件 A 发生的概率 $P(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

由题意,要使得组成的三位数能被 3 整除,

则只能同时出现 3 个 1 或者同时出现 3

个 5，即 111 和 555 共 2 个数，

即组成的三位数能被 3 整除的数的个数为 2，

所以事件 B 发生的概率 $P(B)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

故 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{4}$.

(2)因为 $A\cap B$ 表示组成的三位数既能被 3 整除，又能被 5 整除，

555 既能被 3 整除，又能被 5 整除，

所以 $P(A\cap B)=\frac{1}{8}$.

因为 $A\cup B$ 表示组成的三位数能被 3 整除或能被 5 整除，

所以 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$.

故 $P(A\cap B)=\frac{1}{8}$，$P(A\cup B)=\frac{5}{8}$.

4.【解】(1)设 A_i =“甲第 i 轮做对”($i=1,2$)，设 B_i =“乙第 i 轮做对”($i=1,2$)，设 C_i =“两轮比赛结束后甲得 i 分”($i=0,1,2$)，设 D_i =“两轮比赛结束后乙得 i 分”($i=0,1,2$).

$P(D_1)=P(B_1\overline{B_2}\cup\overline{B_1}B_2)$

$=P(B_1\overline{B_2})+P(\overline{B_1}B_2)$

$=P(B_1)P(\overline{B_2})+P(\overline{B_1})P(B_2)$

$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$.

所以两轮比赛结束后乙得分为 1 分的概率为$\frac{3}{8}$.

(2)设 E =“不进行加赛甲就获得‘数独王’”.

$P(D_0)=P(\overline{B_1}\ \overline{B_2})=P(\overline{B_1})P(\overline{B_2})=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$，

$P(C_1)=P(A_1\overline{A_2}\cup\overline{A_1}A_2)=P(A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1}A_2)=P(A_1)P(\overline{A_2})+P(\overline{A_1})P(A_2)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{25}$，

$P(C_2)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=\frac{4}{5}\times$

$\frac{4}{5}=\frac{16}{25}$,

$P(E)=P(C_2D_1\cup C_2D_0\cup C_1D_0)=P(C_2D_1)+P(C_2D_0)+P(C_1D_0)=P(C_2)P(D_1)+P(C_2)P(D_0)+P(C_1)P(D_0)=\frac{16}{25}\times\frac{3}{8}+\frac{16}{25}\times\frac{1}{16}+\frac{8}{25}\times\frac{1}{16}=\frac{3}{10}$,

所以不进行加赛甲就获得“数独王”的概率为$\frac{3}{10}$.

5. A 【解析】记车况“好”“中”“差”的三辆车分别为 A,B,C,方案一坐到车况为“好”的车为 n_1,方案二坐到车况为“好”的车为 n_2,则

1	2	3	n_1	n_2
A	B	C		√
A	C	B		√
B	A	C	√	
B	C	A	√	
C	A	B	√	
C	B	A		

于是 $p_1=\frac{1}{2}$,$p_2=\frac{1}{3}$. **故选** A.

6. 【解】设事件 A 为“依次不放回地取球,最后只剩红球”,事件 B 为“依次不放回地取球,最后一只为红球”,

下面证明 A 中含有的样本点与 B 含有的样本点一样多.

设事件 C 为 A 中的样本点,则 C 至少余有一个红球且没有黑球,

故 C 为 B 中的样本点,

设事件 D 为 B 中的样本点,则 D 的最后一球为红球,

则 D 也为 A 中的样本点,

故 A 中含有的样本点与 B 含有的样本点一样多,即 A 与 B 发生的概率相等.

故问题转化为求 $P(B)$,由古典概型的概率公式可得 $P(B)=\frac{9}{20}$,

故最后只剩下红球的概率为$\frac{9}{20}$.

第十章 全章上分

1. D 【解析】对于 A,由于事件结果的随机性,购买 100 张彩票不一定会中奖,**故 A 错误**;

对于 B,做 7 次抛硬币的试验,结果 3 次出现正面,因此,抛一枚硬币出现正面的频率是$\frac{3}{7}$,而不是概率为$\frac{3}{7}$,**故 B 错误**;

对于 C,事件 A,B,C 两两互斥,不一定有 $P(A)+P(B)+P(C)=1$,比如抛掷质地均匀的骰子,其中投掷出 1 点,2 点,3 点这三个事件两两互斥,但这三个事件的和事件发生的概率为$\frac{1}{2}$,**故 C 错误**;

对于 D,因为 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(AB)=12+8-4=16$,所以 $P(A\cup B)=\frac{n(A\cup B)}{n(\Omega)}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$,**故 D 正确.**

2. D 【解析】事件 C,E 均表示选出的 2 个人是 1 个男生和 1 个女生,则 $C=E$,**故 A 错误**;

事件 A=“选出的 2 个人是 1 个男生和 1 个女生或者 2 个女生”,事件 B=“选出的 2 个人是 1 个男生和 1 个女生或者 2 个男生”,则 $A\neq B$,**故 B 错误**;

事件 D,E 包含的样本点都不相同,则 $D\cap E=\varnothing$,**故 C 错误**;

事件 B,D 包含的样本点都不相同,则 $B\cap D=\varnothing$,事件 B=“选出的 2 个人是 1 个男生和 1 个女生或者 2 个男生”,事件 D=“选出的 2 个人是 2 个女生”,则 $B\cup D$ 包含了样本空间中所有的样本点,所以 $B\cup D=\Omega$,**故 D 正确.**

3. B 【解析】根据题意,在 20 组随机数中,表示甲获胜的有 123,512,114,125,152,151,共 6 种情况,所以可估计甲获得冠军的概率为$\frac{6}{20}=0.3$. **故 B 正确.**

4. D 【解析】由该同学只进入两个社团的概率为$\frac{5}{36}$,得 $mn\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{6}m(1-$

$n)+\frac{1}{6}n(1-m)=\frac{5}{36}$,

由三个社团都进不了的概率为$\frac{5}{12}$,得

$(1-m)(1-n)\left(1-\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{12}$,

整理得$\begin{cases}m+n+3mn=\frac{5}{6},\\m+n-mn=\frac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $m+n=\frac{7}{12}$.

故 D 正确.

5. D 【解析】对于 A,由 $P(A)=\frac{1}{3}$,

$P(B)=\frac{1}{6}$,得 $P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$,显然 $P(\overline{A})P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{9}=P(\overline{A}B)$,因此事件 $\overline{A}$ 与 B 相互独立,**故 A 错误;**

对于 B,若 B 发生时 A 一定发生,则 $B\subseteq A$,$P(AB)=P(B)=\frac{1}{6}$,**故 B 错误;**

对于 C,若 A 与 B 互斥,则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$,**故 C 错误;**

对于 D,若 A 与 B 相互独立,则 $P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$,因此 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{18}=\frac{4}{9}$,**故 D 正确.**

6. D 【解析】设甲、乙、丙获得一等奖分别为事件 A,B,C,则 $P(A)=\frac{1}{2}$,$P(B)=\frac{2}{3}$,$P(C)=\frac{3}{4}$,则他们不获一等奖的概率分别是 $P(\overline{A})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,$P(\overline{B})=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$,$P(\overline{C})=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$,

则这三人中恰有两人获得一等奖的概率 $P(\overline{A}BC)+P(A\overline{B}C)+P(AB\overline{C})=P(\overline{A})P(B)P(C)+P(A)P(\overline{B})P(C)+P(A)P(B)P(\overline{C})=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{11}{24}$,这三人都获得

一等奖的概率 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$，所以这三人中至少有两人获得一等奖的概率 $P=\frac{11}{24}+\frac{1}{4}=\frac{17}{24}$. **故 D 正确.**

7. B 【解析】根据题意，正四面体的四个面中，有红色的面有 2 个，有黄色的面有 2 个，有蓝色的面有 2 个，则 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$，且 $P(AB)=P(BC)=P(ABC)=\frac{1}{4}$.

对于 A，由题知 $P(A)+P(B)+P(C)=\frac{3}{2}\neq 1$，**故 A 错误；**

对于 B，由题知 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{4}$，**故 B 正确；**

对于 C，由题知 $P(ABC)=\frac{1}{4}$，$P(A)P(BC)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$，所以 $P(ABC)\neq P(A)P(BC)$，**故 C 错误；**

对于 D，由题知 $P(ABC)=\frac{1}{4}$，$P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$，所以 $P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C)$，**故 D 错误.**

8. D

思路导引 计算对立事件的概率，从下雨次数入手，分类讨论计算两天都不淋雨的概率，即可得至少有一天淋雨的概率.

【解析】"至少有一天淋雨"的对立事件为"两天都不淋雨"，连续上两天班，上班、下班的总次数为 4.

(1) 4 次均不下雨，概率为 $\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$.

(2) 有 1 次下雨但不淋雨，则第一天或第二天上班时下雨，概率为 $2\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{16}{81}$.

(3) 有 2 次下雨但不淋雨，共 3 种情况：

①同一天上、下班均下雨；

②两天上班时都下雨，下班时都不下雨；

③第一天上班时下雨，下班时不下雨，第二天上班时不下雨，下班时下雨.

概率为 $2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{16}{81}$.

(4)有 3 次下雨但不淋雨，则第一天或第二天下班时不下雨，概率为 $2\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{2}{3}=\frac{4}{81}$.

(5) 4 次均下雨但不淋雨，概率为 $\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$.

综上，两天都不淋雨的概率为 $\frac{16}{81}+\frac{16}{81}+\frac{16}{81}+\frac{4}{81}+\frac{1}{81}=\frac{53}{81}$，

故他至少有一天淋雨的概率为 $1-\frac{53}{81}=\frac{28}{81}$. **故选 D.**

9. AC 【解析】由题意可知，样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$A=\{1,4,7\}$，$B=\{1,2,3,4,5,6\}$，$C=\{8,9\}$，

则 $n(\Omega)=9$，$n(A)=3$，$n(B)=6$，可得 $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{2}{3}$.

对于 A，因为 $A\cap C=\varnothing$，所以事件 A 与事件 C 是互斥事件，**故 A 正确；**

对于 B，因为 $A\cap B=\{1,4\}\neq\varnothing$，所以事件 A 与事件 B 不是互斥事件，**故 B 错误；**

对于 C，由选项 B 可知 $n(AB)=2$，则 $P(AB)=\frac{n(AB)}{n(\Omega)}=\frac{2}{9}$，故 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$，所以事件 A 与事件 B 相互独立，**故 C 正确；**

对于 D，因为 $B\cup C=\{1,2,3,4,5,6,8,9\}\neq\Omega$，所以事件 B 与事件 C 不是对立事件，**故 D 错误.**

10. ACD 【解析】对于 A，$P(A)=0.6$，$P(B)=0.3$，则 $P(\overline{A})=1-0.6=0.4$，$P(\overline{B})=1-0.3=0.7$，又事件 A,B 相互独

立,则 $P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)=0.6\times0.7+0.4\times0.3=0.54$,故 A 正确;

对于 B,若三个事件 A,B,C 两两独立,由相互独立事件的乘法公式 $P(AB)=P(A)P(B)$,$P(AC)=P(A)P(C)$,$P(BC)=P(B)P(C)$,无法确定 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$,故 B 错误;

对于 C,$P(A)>0$,$P(B)>0$,若事件 A,B 相互独立,则 $P(AB)=P(A)P(B)>0$,若事件 A,B 互斥,则 $P(AB)=0$,故 C 正确;

对于 D,设任意事件 A 发生的概率为 p,必然事件 B 发生的概率为 1,不可能事件 C 发生的概率为 0,则 $P(AB)=p=P(A)P(B)$,$P(AC)=0=P(A)P(C)$,故 D 正确.

11. AD 【解析】对于 A,小明获胜的概率 $P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$,符合题意.

对于 B,若要点数之和为奇数,则只能是一奇一偶,而每抛一次出现奇数,偶数的概率都是 $\frac{1}{2}$,但可能是先出现奇数,也可能是先出现偶数,故小明获胜的概率为 $P_1=\frac{3\times3}{6\times6}+\frac{3\times3}{6\times6}=\frac{1}{2}$,不符合题意.

对于 C,若点数之和为 6,则两次抛出的点数可以是 $(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)$,即小明获胜的概率 $P_2=\frac{5}{6\times6}=\frac{5}{36}$;若点数之和为 8,则两次抛出的点数可以是 $(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)$,即小红获胜的概率 $P_3=\frac{5}{6\times6}=\frac{5}{36}$,不符合题意.

对于 D,抛掷骰子三次,掷出的点数为连续三个自然数,则这三个自然数可以是 $\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{3,4,5\},\{4,5,6\}$,所以小明获胜的概率 $P_4=\frac{4\times3\times2\times1}{6\times6\times6}=\frac{1}{9}$,若掷出的点数都相同,则这三个自然数可以是 $\{1,1,1\},\{2,2,2\},\{3,3,3\},\{4,4,4\},\{5,5,5\},\{6,6,6\}$,所以小红

获胜的概率 $P_5=\frac{6}{6\times6\times6}=\frac{1}{36}$，符合题意.

12. $\frac{7}{31}$　【解析】集合 $S=\{1,2,3,4,5\}$ 的非空子集的个数为 $2^5-1=31$，具有性质 p 的非空子集为 $\{3\}$，$\{1,5\}$，$\{2,4\}$，$\{1,3,5\}$，$\{2,3,4\}$，$\{1,2,4,5\}$，$\{1,2,3,4,5\}$，共 7 个，所以所取出的非空子集具有性质 p 的概率为 $\frac{7}{31}$.

13. $\frac{1}{5}$　【解析】$\because$ 阳数为 1,3,5,7,9，阴数为 2,4,6,8,10，$\therefore$ 从阳数和阴数中各取一数的所有组合共有 $5\times5=25$（个），满足差的绝对值为 5 的有(1,6)，(3,8)，(5,10)，(7,2)，(9,4)，共 5 个，$\therefore$ 所求概率 $P=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$.

14. 0. 3　【解析】设甲投中 8 次、9 次、10 次分别为事件 A_1,A_2,A_3，乙投中 8 次、9 次、10 次分别为事件 B_1,B_2,B_3，则 $P(A_1)=0.6$，$P(A_2)=0.3$，$P(A_3)=0.1$，$P(B_1)=0.7$，$P(B_2)=0.2$，$P(B_3)=0.1$.

设甲投中的次数多于乙投中的次数为事件 C，则 $C=A_2B_1+A_3B_1+A_3B_2$，可得 $P(C)=P(A_2B_1)+P(A_3B_1)+P(A_3B_2)=P(A_2)P(B_1)+P(A_3)P(B_1)+P(A_3)\cdot P(B_2)=0.3\times0.7+0.1\times0.7+0.1\times0.2=0.3$，所以甲投中的次数多于乙投中的次数的概率为 0. 3.

15.【解】(1) 设 A_1,A_2 为两个标有“中奖”字样的小球，B_1,B_2,B_3 为三个未标有“中奖”字样的小球，从中随机抽取两个小球，则有 $\{A_1,A_2\}$，$\{A_1,B_1\}$，$\{A_1,B_2\}$，$\{A_1,B_3\}$，$\{A_2,B_1\}$，$\{A_2,B_2\}$，$\{A_2,B_3\}$，$\{B_1,B_2\}$，$\{B_1,B_3\}$，$\{B_2,B_3\}$，共 10 种情况，其中中奖的情况共有 7 种. 所以顾客抽奖一次中奖的概率 $P=\frac{7}{10}$.

(2) 由(1)可知，每次抽奖中一等奖的概率 $P_1=\frac{1}{10}$，每次抽奖中二等奖的概率 $P_2=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

故进行 500 人次抽奖兑出奖品总价值的估计值为 $500\times\frac{1}{10}\times10+500\times\frac{3}{5}\times5=2\ 000$(元).

16.【解】(1)从这 5 人中随机采访 3 人,有(小红、小东、小军),(小红、小东、小英),(小红、小东、小青),(小红、小军、小英),(小红、小军、小青),(小红、小英、小青),(小东、小军、小英),(小东、小军、小青),(小东、小英、小青),(小军、小英、小青),共 10 种情况,

其中"至少有 1 人学的是通信专业"的对立事件是"没有人是学通信专业的",即(小红、小东、小青),

所以至少有 1 人学的是通信专业的概率 $P=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$.

(2)设 A="小红应聘成功",B="小军应聘成功",C="小青应聘成功",则至少有 2 人应聘成功的概率为 $P(ABC)+P(\overline{A}BC)+P(A\overline{B}C)+P(AB\overline{C})=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{17}{24}$.

17.【解】(1)众数为 75 分,平均数为 $(55\times0.015+65\times0.025+75\times0.03+85\times0.02+95\times0.01)\times10=73.5$(分).

(2)根据按比例分配的分层随机抽样的方法抽取 6 名学生,$[80,90)$范围内抽取 4 人,$[90,100]$范围内抽取 2 人.

设$[80,90)$内的 4 人编号为 1,2,3,4,$[90,100]$内的 2 人编号为 a,b,

则所有抽取结果为 123,124,12a,12b,134,13a,13b,14a,14b,1ab,234,23a,23b,24a,24b,2ab,34a,34b,3ab,4ab,共 20 个结果,其中"90 分以上(包括 90 分)的同学恰有 2 人被抽到"所包含的结果共 4 种,所以"90 分以上(包括 90 分)的同学恰有 2 人被抽到"的概率为 $\frac{4}{20}$,

即$\frac{1}{5}$.

18.【解】(1)由频率分布直方图得 $10a=1-10\times(0.005+0.010\times2+0.020+0.025)$,解得 $a=0.030$.

因为 $10\times(0.005+0.010+0.020)=0.35<0.5$,$0.35+0.030\times10=0.65>0.5$,所以中位数在区间[70,80)上,设中位数为 x,则有 $10\times(0.005+0.010+0.020)+0.030\times(x-70)=0.5$,解得 $x=75$,所以估计该校全体学生这次数学成绩的中位数为 75.

(2)设 $A=$“任选 1 道题,甲答对”,$B=$“任选 1 道题,乙答对”,$C=$“任选 1 道题,丙答对”,则由古典概型概率计算公式得,$P(A)=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$,$P(B)=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$,$P(C)=\frac{n}{20}$,所以 $P(\overline{A})=\frac{2}{5}$,$P(\overline{B})=\frac{3}{5}$,$P(\overline{C})=1-\frac{n}{20}$.

①记 $D=$“甲、乙两位同学恰有一人答对”,则有 $D=A\overline{B}\cup\overline{A}B$,且 $A\overline{B}$ 与 $\overline{A}B$ 互斥,$P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)\cdot P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{13}{25}$,所以任选 1 道数学问题,甲、乙两位同学恰有一人答对的概率为$\frac{13}{25}$.

②记 $E=$“甲、乙、丙三个人中至少有一个人答对”,则 $\overline{E}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$,所以 $P(E)=1-P(\overline{E})=1-P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=1-\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times\left(1-\frac{n}{20}\right)=\frac{22}{25}$,解得 $n=10$.

19.【解】(1)若甲、乙投篮总次数为 2,则乙不可能获胜;

若甲、乙投篮总次数为 3 且乙获胜,则第 1 次甲未投中,乙投中第 2,3 次,所以其概率 $P_1=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$;

若甲、乙投篮总次数为 4 且乙获胜,则第 1 次甲投中、第 2 次甲未投中,乙投中第 3,4 次,所以其概率 $P_2=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times$

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{36}$.

记甲、乙投篮总次数不超过 4 时，乙获胜为事件 A，则 $P(A)=P_1+P_2=\frac{1}{18}+\frac{1}{36}=\frac{1}{12}$，所以甲、乙投篮总次数不超过 4 时，乙获胜的概率为$\frac{1}{12}$.

(2)若比赛结束时甲赢得比赛且甲恰好投了 2 次篮，则甲连续投中 2 次，其概率 $P_3=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

若比赛结束时乙赢得比赛，又甲恰好投了 2 次篮，

①甲投中第 1 次，第 2 次甲未投中，乙投中第 3，4 次，其概率 $P_4=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{36}$；

②甲第 1 次未投中，第 2 次乙未投中，第 3 次甲未投中，第 4，5 次乙投中，其概率 $P_5=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{54}$；

③甲第 1 次未投中，第 2 次乙投中，第 3 次乙未投中，第 4 甲未投中，第 5，6 次乙投中，其概率 $P_6=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{162}$.

综上，比赛结束时，甲恰好投了 2 次篮的概率 $P=P_3+P_4+P_5+P_6=\frac{1}{4}+\frac{1}{36}+\frac{1}{54}+\frac{1}{162}=\frac{49}{162}$.